En Toute simplicité...

Physique

La relativité restreinte

N° P5 Ed:09/2020
Auteur: Alain Bellevergue
al.bellevergue@orange.fr

Malicia et Neurino sont deux amis qui aiment discuter de sujets les plus variés.

Malicia est jeune et curieuse futée, ses questions parfois inattendues permettent d'éclairer les sujets traités sous des angles surprenants.
Elle joue le rôle du candide et n'a qu'une ambition : comprendre.

Neurino possède une plus grande expérience. IL aime transmettre ses connaissances, notamment à son amie Malicia. Il joue le rôle du professeur.

Nos deux compères, en toute simplicité et en toute complicité nous emmèneront explorer des sujets divers et toujours passionnants.

Le monde est mystérieux, nous sommes un mystère et l'homme pensant recherche inexorablement à percer le fonctionnement de son univers ! Il bâtit les théories les plus folles pour expliquer le monde et quand il pense avoir atteint un objectif, de nouvelles découvertes viennent remettre tout en question.

La physique est l'une des sciences qui ébranle les esprits les plus ardus. De l'infiniment petit à l'infiniment grand, les lois de la nature rythment l'expansion des galaxies et la valse des électrons.

Bien sûr qui dit physique dit aussi mathématiques, les matheux pourront se faire plaisir mais, que les autres se rassurent, nos amis Malicia et Neurino développeront les conclusions des calculs dans ce qu'ils ont de plus remarquables sans torturer outre mesure vos méninges.

Partons à l'aventure et laissons la parole **à Malicia et Neurino**.

Aujourd'hui :

La relativité restreinte.

Comment à partir de l'invariance de la vitesse de la lumière, est-il possible de jouer avec le temps et l'espace ?

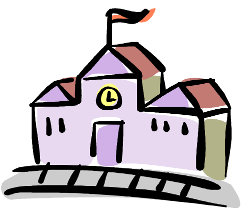
Comment arrive-t-on à la célèbre formule : $E=mc^2$?

Tout est relatif

Malicia : Bonjour Neurino, j'ai un peu mal au cœur.
Neurino : Bonjour Malicia, mais que t'arrive t'il ?
Malicia : Bien voilà : j'étais dans le train en attendant le départ, et j'ai eu l'impression que mon train démarrait dans le mauvais sens.

Neurino : Et alors ?
Malicia : En fait c'était le train d'à-côté qui démarrait, le mien était encore immobile et quand je m'en suis rendue compte ça m'a fait trop bizarre.

Neurino : C'est parce que, dans ton référentiel, ta vue, était en contradiction avec ce que ressentait ton corps.
Malicia : Que dis-tu ? Que j'ai des visions !
Neurino : En quelque sorte, mais tout est relatif.
Malicia : Que veux-tu dire ?

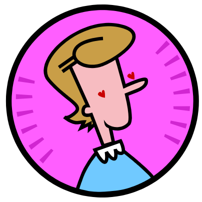


Neurino : En fait, tu n'as cru que ton référentiel : ton train, se déplaçait, or c'était le train voisin qui se déplaçait…s'il n'y avait pas la gare, fixe, comme référence, il est impossible de dire quel est le train en mouvement par rapport à l'autre.
Malicia : Je vois, la gare fixe donc la Terre sert de référence et tout mouvement ne peut être défini que par rapport à un référentiel.

Neurino : C'est bien cela, mais comme un train peut en cacher un autre un référentiel peut aussi en cacher un autre. Ainsi le mouvement de la Terre peut être défini par rapport au Soleil, et tes mouvements dans le train peuvent être définis aussi par rapport au Soleil.
Malicia : Est-il possible de changer de référentiel ?
Neurino : Bien sûr ; Si tu marches dans le train à 5km/h et que le train roule à 100km/h, tu te déplaces à 105km/h par rapport à la voie donc par rapport à la Terre.
Malicia : Si je marche dans le même sens que le train, sinon, si je le remonte, je me déplace à 95 km/h par rapport à la voie.
Neurino : Tout à fait, c'est ce que l'on appelle la loi de composition des vitesses dans un repère galiléen : Va (vitesse absolue) = Ve (Vitesse d'entrainement) +ou- Vr (Vitesse relative).

Malicia : En fait mes mouvements, dans un repère R sont déduits de mes mouvements dans un repère R' par une simple transformation mathématique.

Le premier postulat de la relativité restreinte



Neurino : Epatant !!! Tu viens d'énoncer le premier postulat de la relativité restreinte qu'Albert Einstein a publié en 1905.
Malicia : Tu me vois confuse.
Neurino : Autrement formulé ce premier postulat signifie que chaque repère galiléen possède son temps propre et son espace propre.
Malicia : Que veut dire galiléen ?

Neurino : C'est une famille de repères dont le mouvement ne modifie pas la loi d'inertie, on les appelle aussi des repères inertiels.
Malicia : Alors là tu fais fort ! Je n'ai rien compris.
Neurino : Le principe d'inertie ou première loi de Newton dit simplement que tout corps non soumis à une force conserve son état de repos ou son mouvement uniforme rectiligne, donc sa vitesse et sa trajectoire droite.
Malicia : Tu vois quand tu veux… des repère galiléens ou inertiels sont donc des repères dans lesquels les corps en mouvement conservent le principe d'inertie donc leur état de repos ou leur mouvement rectiligne uniforme, mais pourquoi cette restriction ?

Neurino : Car autant il est facile d'imaginer que le repos et le mouvement uniforme sont des notions relatives donc réversibles autant il est moins probant d'appliquer le principe de relativité à des mouvements accélérés ou décélérés.
Malicia : Je vois, on ne peut pas dire que je suis relativement au repos dans une voiture qui freine « brusquement »

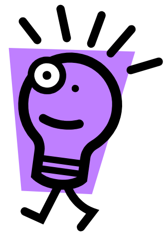
Neurino : Tu as bien compris, c'est pourquoi on parle de relativité restreinte, on verra en relativité générale comment lever cette restriction.

Le second postulat de la relativité restreinte

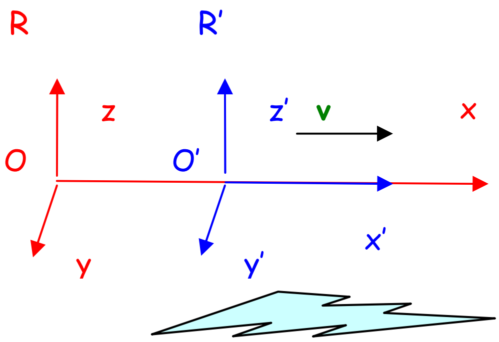
Malicia : Si tu me parles d'un premier postulat d'Einstein, c'est qu'il y en a au moins un second.

Neurino : On ne peut rien te cacher, mais tu connais déjà la réponse, nous l'avons vue quand nous avons parlé de la lumière.
Malicia : Ah oui ! Ne serait-ce pas la vitesse de la lumière qui est constante dans le vide. ?

Neurino : Exactement, et surtout quel que soit le repère. On peut aussi le formuler ainsi : La vitesse de la lumière est indépendante du mouvement de la source qui émet cette lumière.
Malicia : Mais comment dans ce cas déduire les mouvements dans un repère R de ceux dans un repère R' ? N'est ce pas contradictoire avec le premier postulat ?



Les transformations de Lorentz



Neurino : Non il faut simplement, quelle que soit la vitesse que l'on ajoute à la vitesse de la lumière, que l'on retrouve la vitesse de la lumière et on démontre dans ces conditions que si nous avons 2 repères R= (x, y, z, t) et R'= (x', y', z', t') dont l'un est en mouvement uniforme de vitesse v par rapport à l'autre selon l'axe x que :

$\mathbf{x'=(x-vt)\ (1-\beta^2)^{-1/2}}$ **et** $\mathbf{t'=(t-\ vx/c^2)\ (1-\beta^2)^{-1/2}}$ **avec** $\mathbf{\beta=v/c}$ $\mathbf{y=y'}$ $\mathbf{z=z'}$
ou inversement que $\mathbf{x=(x'+vt')\ (1-\beta^2)^{-1/2}}$ **et** $\mathbf{t=(t'+vx'/c^2)\ (1-\beta^2)^{-1/2}}$

Donc on retrouve bien les coordonnées dans le repère R par une simple transformation mathématique des coordonnées dans le repère R' ou inversement et le premier postulat est bien respecté.

Malicia : Je suppose que t et t' sont respectivement les temps dans R et R'.

Neurino : Oui, nous avons x, y et z les trois dimensions de l'espace et t le temps. Ces formules sont appelées les transformations de Lorentz.

Un tout petit peu de mathématiques,

Démonstration des transformations de Lorentz

En admettant le principe d'homogénéité de l'espace et du temps
Les coordonnées dans R' sont des combinaisons linéaires des coordonnées dans R
$x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t$ $y'=y$ $z'=z$ $t'= a_{41}x+a_{42}y+a_{43}z+a_{44}t$
Pour facilité les calculs on prendra $y=y'=z=z'=0$ donc,
$x'=a_{11}x+a_{14}t$ et $t'=a_{41}x+a_{44}t$ pour $x=t=0$ alors $x'=t'=0$

Considérant un rayon lumineux dans R sa vitesse : «c » est constante donc : $dx/dt = c$
Considérant un rayon lumineux dans R' sa vitesse : «c » est constante
donc : $dx'/dt' =c$

.
$c = dx'/dt' = (a_{11}dx +a_{14}dt) / (a_{41}dx+a_{44}dt) = (a_{11}c+a_{14}) / (a_{41}c+a_{44})$
donc $a_{41}c^2+ (a_{44}-a_{11}) c-a_{14} = 0$

Ceci restant valable pour le sens (-x, -x') on en déduit :
$a_{44} = a_{11}$ et $a_{41}c^2 = a_{14}$

d'où
$x'= a_{11}x + a_{41}c^2t$ et $t'= a_{41}x + a_{11}t$

Le mouvement relatif des repères R et R' donne : $dx/dt = v$ et $dx'/dt'= -v$

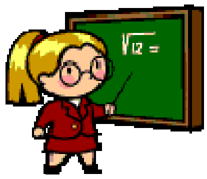
pour O' dans R : $dx'= 0$ (car O' immobile dans R')
or $dx' = a_{11} dx +a_{41}c^2dt$
ce qui entraine :
$0 = a_{11}v + a_{41}c^2$ $a_{41} = -a_{11}v/c^2$ donc $x' = a_{11}x -a_{11}vt$ $t'= -a_{11}vx/c^2+ a_{11}t$

on en déduit : $x = (x'+vt') /a_{11} (1-v^2/c^2)$ et $t= (vx'/c^2+t')/a_{11} (1-v^2/c^2)$
or par principe de réversibilité des repères R et R' pour le mouvement de vitesse -v de O dans R' $x= a_{11}x'+a_{11}vt'$ et $t= a_{11}vx'/c^2+ a_{11}t'$ or cette fois $dx=0$
Ce qui entraine : $a_{11}= (1-v^2/c^2)^{-1/2}$

D'où $\mathbf{x'=(x-vt)\,(1-\beta^2)^{-1/2}}$ **et** $\mathbf{t'=(t- vx/c^2)(1-\beta^2)^{-1/2}}$ **avec** $\mathbf{\beta=v/c}$

CQFD

c est une vitesse limite



Malicia : Dis-moi Neurino : $\mathbf{(1-\beta^2)^{-1/2}}$ = $1/\sqrt{(1-\beta^2)}$ et le membre sous une racine carrée ne peut pas être négatif ?
Neurino : Pas dans notre monde réel que je sache.
Malicia : Mais alors $(1-\beta^2)$ ne peut pas être négatif donc β^2 est < 1 or $\beta^2=v^2/c^2$ donc $v^2 < c^2$ soit $v < c$ d'où aucun repère mobile ne peut dépasser la vitesse c

Neurino : Bravo, excellente démonstration. En effet, dans notre univers aucun élément matériel ne peut dépasser la vitesse de la lumière dans le vide.
Malicia : C'est troublant, cela signifie par exemple, que quelle que soit la puissance d'un accélérateur de particules, celles-ci, ne pourront jamais dépasser la vitesse limite c.
Neurino : Et oui mais il y a encore plus troublant…
Malicia : Ca y est, te connaissant je ne suis pas au bout de mes surprises ! Allez, je me cramponne.

Le ralentissement des horloges – la dilatation du temps.

Neurino : Dans un repère R' animé d'une vitesse v, disons proche de c pour que cela soit significatif, et bien… et bien…
Malicia : Alors tu vas le dire oui ?

Neurino : Les horloges liées à ce repère tournent moins vite que les horloges restées dans R.
Malicia : Ca y est, il est « fêlé de la cafetière », pauvre Neurino.
Neurino : Je m'attendais à ta réaction, mais je te prouve ce que je te dis : Un intervalle de temps dans R est égal à t2-t1 si je prends t2 > t1

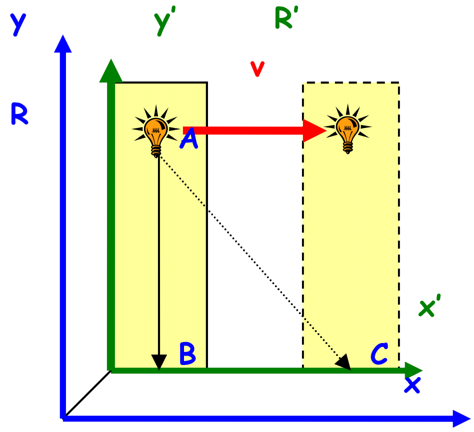
Malicia : Jusque là je te suis.
Neurino : Nous avons vu que $t' = (t-vx/c^2)\,(1-\beta^2)^{-1/2}$, donc en considérant un événement qui se déroule au même point x $t'2 - t'1 = (t2 - t1)\,(1-\beta^2)^{-1/2}$;
Donc $\mathbf{\Delta t = \Delta t'\,(1-\beta^2)^{1/2}}$

Malicia : $(1-\beta^2)^{1/2}$ étant < 1 $\Delta t' > \Delta t$, le temps dans R' est plus grand que dans R, les horloges tournent donc moins vite dans R'. Neurino je te présente mes excuses, mais je reste confondue.

Neurino : Ne t'en fais pas cela a troublé les plus grands physiciens du début du 20éme siècle. Mais ce ralentissement des horloges est juste et vérifié expérimentalement. On dit aussi que le temps se dilate dans R'

Malicia : Je reste troublée...

Neurino : Un petit dessin, te fera mieux comprendre. Tu imagines une horloge dans un repère R' en mouvement de translation rectiligne et à vitesse constante v et dont le point A émet des flashs réguliers.



Mettons nous dans R'. L'horloge est fixe et la distance AB vaut $c\Delta t'$. Le flash mettant $\Delta t'$ pour atteindre B.

Mettons nous maintenant dans R, l'horloge avance à la vitesse v le rayon parcours AC pendant Δt donc $AC = c\,\Delta t$ d'autre part BC vaut donc dans R : $v\,\Delta t$.

Tu appliques maintenant Pythagore au triangle ABC.

Malicia : $AB^2+BC^2= AC^2$ donc $c^2\Delta t'^2+ v^2\Delta t^2=c^2\Delta t^2$ donc $\Delta t' = \Delta t\,(1-\beta^2)^{1/2}$ oh....on retrouve la formule de dilatation du temps, **mais inversée**, $\Delta t' > \Delta t$, le temps se dilate dans R, les horloges tournent moins vite dans R.

Neurino : C'est parce que nous sommes dans R alors que les transformations de Lorentz sont vues de R'. Si nous appelons temps propre le temps mesuré dans son référentiel et temps impropre le temps mesuré dans l'autre référentiel alors :

$$\boxed{\textbf{Temps propre=temps impropre.}\ (1-\beta^2)^{1/2}}$$

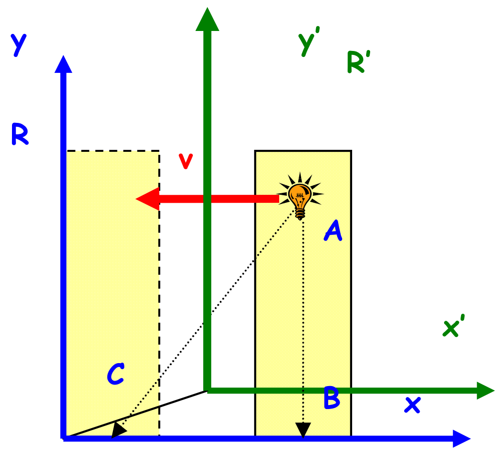
Malicia : Je vois mieux à quoi correspond la dilatation du temps Par contre si dans R une horloge retarde, comment serait une horloge dans R'

Neurino : Naturellement et comme nous l'avons vu, tout étant relatif elle doit aussi retarder.

Malicia : Toutes les 2 retardent alors ?

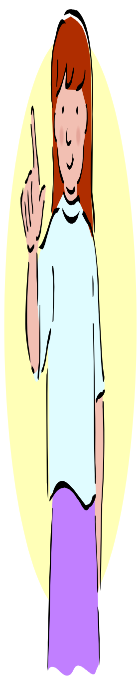
Neurino : Oui, mais l'une par rapport à l'autre car la situation est réversible, il suffit de considérer R' fixe de lier l'horloge à R et de faire glisser R vers l'arrière à la vitesse v donc en fait (-v)

Malicia : En effet si on considère maintenant R' fixe et R mobile alors $AB=c\Delta t$; $BC=v\ \Delta t'$; $AC=c\ \Delta t'$ et donc $c^2\Delta t^2 + v^2\Delta t'^2 = c^2\Delta t'^2$ $\Delta t = \Delta t'(1-\beta^2)^{1/2}$ c'est l'horloge liée à R qui retarde vu de R'. c'est magique !
Neurino : Attention, en disant qu'elles retardent toutes les 2 tu raisonnes dans l'absolu en superposant 2 situations or c'est l'une ou l'autre il faut que tu prennes un point d'observation et que tu mènes tes raisonnements de ce point de vue.
Malicia : Bien mon capitaine, mais dis moi Neurino, nous avons parlé des temps qu'en est-il des distances ?

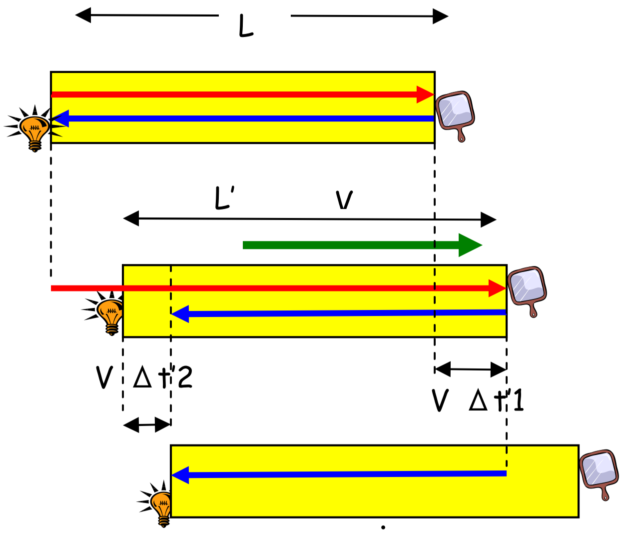


La contraction apparente des distances

Neurino : Si tu prends une règle du Longueur L que tu la places dans le repère R'
Malicia : Elle va donc se déplacer à la vitesse v dans le Référentiel R et parcourir la distance L pendant Δt, donc $L = v\ \Delta t$.
Neurino : Oui mais la question est quelle est sa longueur dans R' ?
Malicia : Dans R', il faut prendre le temps propre $\Delta t'$.
Donc : $L' = v\ \Delta t' = v\ \Delta t\ \mathbf{(1-\beta^2)^{1/2}} = L\ \mathbf{(1-\beta^2)^{1/2}}$
Neurino : $\mathbf{L' = L\ (1-\beta^2)^{1/2}}$ Or $(1-\beta^2)^{1/2} < 1$ donc $L' < L$
Malicia : Il y a contraction des longueurs…je deviens plus petite quand je vais plus vite !!!



Neurino : D'abord tu ne serais que, moins « épaisse », car il n'y a que les dimensions qui vont dans le sens de la vitesse qui se contractent. Ensuite, et en effet c'est ce que pensait Lorentz en 1895 mais Einstein, encore lui, montra qu'il ne s'agissait que d'une contraction apparente due à la dilatation du temps et de la manière dont les observateurs situent les extrémités d'un segment Δx.
Malicia : Je pense qu'il avait raison car cela me paraissait un peu bizarre que ma règle graduée puisse rétrécir avec la vitesse.
Neurino : Merci d'approuver Einstein, il doit être content s'il t'entend.
Malicia : De rien, je suis sûre que tu vas maintenant me montrer comment.
Neurino : Mais bien entendu, cela étant tu vas devoir faire un effort d'imagination. Tu imagines un tube ayant à une extrémité, une lampe et à l'autre un miroir.



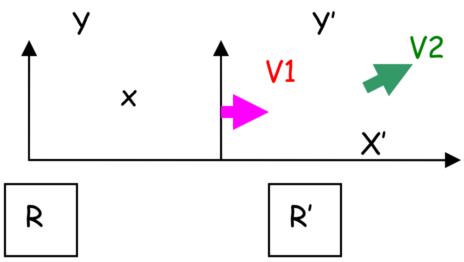
Malicia : Que vais-je pouvoir faire avec cet instrument !!!
Neurino : La lampe émet un éclair à l'instant t.
Malicia : Ca c'est le tube de l'été…
Neurino : Un peu de sérieux…quand le tube est au repos, l'aller-retour soit 2L est parcouru en Δt qui vaut ?
Malicia : $\Delta t = 2L/c$
Neurino : Bien, maintenant le tube est en mouvement rectiligne à la vitesse V.
Malicia : Ca ne s'arrange pas, bon…l'aller voit le parcours augmenté de $V\Delta t'1$ ($\Delta t'1$, temps de l'aller) et le retour raccourci de $V\Delta t'2$ ($\Delta t'2$, temps du retour).

Neurino : En effet, donc cela se passant à la vitesse c
$L' + V\Delta t'1 = \Delta t'1\ c$ et $L' - V\Delta t'2 = \Delta t'2\ c$
Soit : $\Delta t'1 = L'/(c-V)$ et $\Delta t'2 = L'/(c+V)$

Malicia : Soit un temps aller-retour de $\Delta t' = \Delta t'1 + \Delta t'2 = (2L'/c)\,(1-\beta^2)^{-1}$
Neurino : C'est cela, revenons à $\Delta t = 2L/2$…Est-ce un temps propre ou impropre ?
Malicia : Pour Δt ? Tous les paramètres sont liés au tube c'est donc un temps propre, par contre pour $\Delta t'$ qui est un temps vu de l'extérieur, c'est un temps impropre.
Neurino : Parfait tu te souviens temps propre=temps impropre. $(1-\beta^2)^{1/2}$
Malicia : Oui, donc $\Delta t = \Delta t'(1-\beta^2)^{1/2}$ donc $2L/c = \Delta t'\,(1-\beta^2)^{-1/2}$
$2L/c = (\,2L'/c)\,(1-\beta^2)^{-1}(1-\beta^2)^{-1/2}$
Neurino : On arrive heureusement à la même solution : $L' = L\,(1-\beta^2)^{1/2}$ le tube semble rétrécir, mais tu remarqueras que ces longueurs sont déduites des temps, c'est ce qui a permis à Einstein de dire que ce rétrécissement était du à la manière différente dont on peut voir les extrémités du tube dans chacun des repères.

La composition des vitesses

Malicia : Il y a de quoi en perdre son latin…Mais dis-moi Neurino si je suis dans un référentiel R' qui est en mouvement la vitesse V1 par rapport à R et que je lance dans ce référentiel R' une balle à la vitesse V2 quelle sera la vitesse vue de R



Neurino : en admettant que la vitesse V2 se décompose sur l'axe x' en $V2_{x'}$ et sur l'axe Y' en $V2_{y'}$ nous aurons comme composante de V sur x et y :

$$\boxed{V_x = (V2_{x'}+V1)/\ (1+\ V2_{x'}V1/c^2)\ \text{et}\ V_y = V2_{y'}/\ (1+V1V2_x/C^2)\ (1-\beta^2)^{-1/2}}$$

Malicia : Oh, je vois, si V2 et V1 sont petits devant c on retrouve les formules classiques
$V_x=V2_{x'}+V1$ **et** $V_y=V2_{y'}$

Neurino : C'est tout à fait cela, ces formules paraissent compliquées mais se retrouvent très facilement avec le calcul différentiel. (Voir ci-dessous).
Malicia : Peut-on dire que suivant l'axe x (axe de déplacement du repère mobile) que les vitesses s'additionnent alors qu'elles sont constantes pour les autres axes ?
Neurino : Seulement en première approche pour les vitesses petites devant c. Il faut aussi remarquer que nous avons négligé le poids de la balle, nous nous plaçons donc hors champ d'attraction.

Malicia : Cela va de soi car nous sommes dans un repère inertiel !
Neurino : Alors là tu m'épates…

Malicia : Poursuivons, on peut en effet voir que si V1 et V2 sont proches de c, v est proche de c mais reste inférieure à c

Neurino : Oui, c'est une autre façon de montrer que c'est une vitesse limite. Quelles que soient les vitesses V1 et V2 inférieures à c la somme relativiste restera toujours plus petite que c.

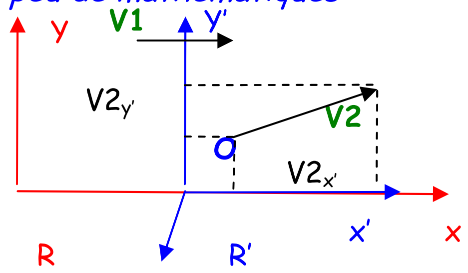
Malicia : Nous avons vu que les temps se dilatent, que les distances apparemment se contractent. que font les vitesses ?

Neurino : On dit qu'elles se composent.

Et comme tu l'as si bien dit elles s'additionnent ou elles se soustraient de façon relativiste selon l'axe de déplacement du repère mobile et elles restent constantes selon les autres axes au coefficient de relativité près.

Malicia : Si c est une constante si stable et comme c relie temps et distance ne peut-on pas dire que temps et distance c'est pareil ?

Un peu de mathématiques



Lorentz

$x' = (x - V1t)\,(1-\beta^2)^{-1/2}$

$t' = (t - V1x/c^2)\,(1-\beta^2)^{-1/2}$

$Y' = Y$

$dx' = (dx - V1dt)\,(1-\beta^2)^{-1/2}$

$dt' = (dt - V1dx/c^2)\,(1-\beta^2)^{-1/2}$

$V2_{x'} = dx'/dt'$

$= (dx/dt - V1)/(1 - V1dx/dt\, c^2)$

$= (V_x - V1) / (1 - V_x V1/c^2)$ ou

$\mathbf{V_{x} = (V2_{x'} + V1) / (1 + V2_{x'} V1/c^2)}$

$V2_{y'} = dy'/dt'$

$= dy/(dt - V1dx/c^2)\,(1-\beta^2)^{-1/2}$

$= V_y/(1 - V1V_x/C^2)(1-\beta^2)^{-1/2}$ ou

$\mathbf{V_y = V2_{y'}/(1 + V1_x/C^2)(1-\beta^2)^{-1/2}}$

L'espace-temps

Neurino : Bien sûr et c'est ce que nous faisons naturellement en disant par exemple que nous habitons à 5 minutes de la boulangerie.

Malicia : C'est ça que tu as appelé le principe d'homogénéité de l'espace et du temps.

Neurino : Exactement, mais encore plus fort, on peut dire que nous sommes dans un espace à quatre dimensions trois dimensions spatiales et une dimension temporelle, que nous pouvons ramener à une dimension distance grâce à c.

Malicia : La précision connue de c=300000km/s permet-elle cette transformation ?

Neurino : Excellente question, en fait on a mesuré c=299792458 m/s avec une telle précision que c'est la précision du mètre étalon qui ne convenait plus. On n'a donc convenu de fixer c à 299792458m/s et de définir le m par rapport à c et le mètre devient en 1983 la distance parcourue par la lumière dans le vide en 1/299 792 458 de seconde.

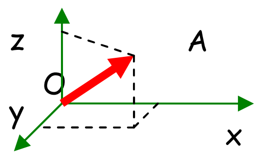
.

Malicia : Quel retournement de situation, donc c est une référence absolue et les autres unités en découlent.

Neurino : Tout à fait, il n'y a donc plus aucune objection à considérer le produit du temps et de c comme une dimension supplémentaire de l'espace-temps.

Cette notion reprise par Minkowski en 1908 en posant : (x, y, z et ct) les quatre dimensions pour décrire un point dans l'espace temps.

Malicia : Comment peut-on relier ces dimensions ?



Neurino : Si tu poses OA la distance parcouru par la lumière par le temps t que peux-tu déduire.

Malicia : OA=ct donc $c^2t^2= x^2 + y^2+ z^2$

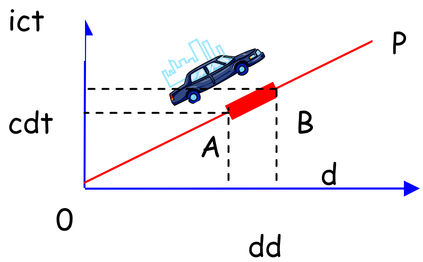
Neurino : Bien, maintenant tu vérifieras en reprenant les transformations de Lorentz que $c^2t^2- (x^2+y^2+z^2) = c^2t'-(x'^2+y'^2+z'^2)$ cette expression est donc invariante d'un changement de repère.

Malicia : Quel est l'intérêt?

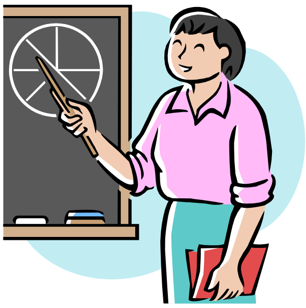
Neurino : En appelant ds tel que $ds^2= c^2(dt^2) – (dx^2+dy^2+dz^2)$ l'intervalle entre deux événements, celui ci est aussi invariant, ce qui permet de donner un interprétation géométrique à l'espace-temps car cet intervalle reste indépendant d'un changement de repère.

Malicia : Comment peut-on représenter un espace à quatre dimensions ?

Neurino : On ne le peut pas, il faut réduire les 3 dimensions spatiales à 1 ou 2 ce qui est souvent possible, un objet se déplaçant le plus souvent sur une droite ou dans un plan et réserver la dimension restante au temps multiplié par c pour obtenir une distance, ou simplement en posant $dd^2=dx^2+dy^2+dz^2$



Malicia : Dans ce cas $AB^2=c^2dt^2+ dd^2$ ou tout simplement $AB^2= c^2dt^2+(dx^2+dy^2+dz^2)$ on ne retrouve pas l'expression de ds^2



Neurino : Il faut que je te parle un peu des nombres complexes : Ils sont composés d'une partie réelle et d'une partie dite imaginaire que l'on fait précéder de la lettre i. donc k un nombre complexe est représenté sous la forme k = a (partie réelle) +i b (partie imaginaire)

Malicia : Un peu comme l'espace-temps est composé d'une partie spatiale et d'une partie temporelle et un événement de l'espace temps vaut s = d + i ct

Neurino : C'est cela, ces nombres s'additionnent et se multiplient avec la particularité que le produit de 2 parties imaginaires forme un nombre réel. $ib*ib=i^2b^2$, i^2 valant «-1»

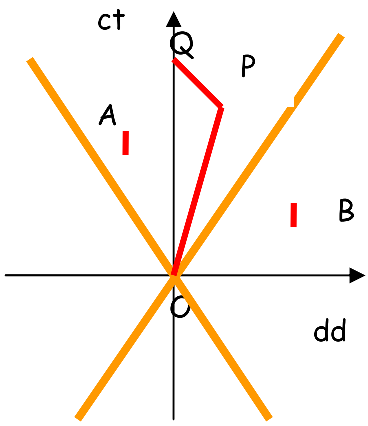
Malicia : $i^2 = -1$ un carré négatif c'est fou.

Neurino : Disons que ce sont simplement des conventions, géométriquement le «-1 » correspond à une rotation de 180° sur l'axe des réels alors que le « i » correspond à une rotation de 90° sur l'axe des imaginaires.

Malicia : Je comprends, maintenant $AB^2 = (dx^2+dy^2+dz^2) +i^2c^2dt^2=$ donc $(dx^2+dy^2+dz^2) - c^2dt^2 = ds^2$

Neurino : Le signe moins est aussi une convention et généralement on pose plutôt $ds^2= c^2dt^2 - (dx^2+dy^2+dz^2)$

Malicia : Bon, nous avons notre espace-temps mais à quoi nous sert-il ?



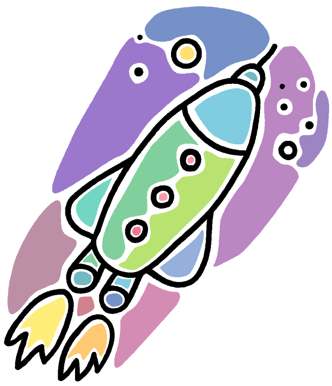
Neurino : A représenter géométriquement non seulement la position d'un objet dans l'espace mais dans le temps. Par exemple OP représente le déplacement d'un objet dans l'espace avec une vitesse uniforme. OP constitue ce qu'on appelle une ligne d'univers.

Malicia : Et PQ, le retour au point de départ, mais à un temps différent. Y a-t-il des points particuliers dans l'espace-temps ?

Neurino : Oui en fonction du signe de ds^2, si $ds^2=0$ donc $c^2t^2= dx^2+dy^2+dz^2$ cela signifie que la dimension temporelle est égale à la dimension spatiale. On définit sa limite comme étant le cône de lumière, limite entre le temps et l'espace.

Malicia : En fait un signal lumineux pourrait joindre les deux dimensions.
Neurino : En effet, maintenant si $ds^2 < 0$ donc si $c^2t^2 < dd^2$ l'événement B par exemple. Aucun signal lumineux ne peut joindre les dimensions spatiale et temporelle, comme aucun autre signal ne peut dépasser la vitesse de la lumière, les dimensions sont distinctes, on dira que B est du genre espace et impossible.
Malicia : Enfin si $ds^2>0$, comme l'événement A, il se trouve dans le cône de lumière.
Neurino : Et il peut donc y avoir un lien de causalité entre les dimensions. On dit que l'événement A est du genre temps et possible.

Le quadrivecteur vitesse



Malicia : Comment est donc représentée la vitesse dans l'espace-temps ?
Neurino : Très simplement en dérivant par rapport au temps chacune des 4 composantes de l'espace-temps.
Malicia : Comme on le fait dans une dimension spatiale tel que $v = dx/dt$ mais cette fois aussi pour la dimension temporelle.
Neurino : Oui on parle de quadrivecteur ou 4-vecteur et on dérive donc le 4 vecteur $U = (ct, x, y, z)$ par rapport au temps et on obtient le 4-vecteur vitesse.
Malicia : Faut-il prendre le temps propre pour dériver ?

Neurino : Bien entendu, c'est le seul qui est indépendant du référentiel et qui est directement lié à l'événement. On reprendra les formules de Lorentz pour déterminer les valeurs dans un référentiel externe R, celui d'un labo par rapport à celui d'une particule par exemple. Tu te rappelles : Temps propre=temps impropre. $(1-\beta^2)^{1/2}$
Malicia : Donc $dt_p = dt\,(1-\beta^2)^{1/2}$ et nous avons le 4-vecteur vitesse :
$V = dU/dt_p = (c\, dt/dt_p, dx/dt_p , dy/dt_p , dz/dt_p)$ donc en remplaçant dt_p par son expression en fonction de dt : $V =(c\,(1-\beta^2)^{-1/2} , dx(1-\beta^2)^{-1/2}/dt , dy(1-\beta^2)^{-1/2}/dt , dz(1-\beta^2)^{-1/2}/dt) = (1-\beta^2)^{-1/2} (c , v_x ,v_y , v_z)$

Donc $V = (1-\beta^2)^{-1/2} (c, v_x, v_y , v_z)$
Avec la particularité du quadrivecteur dont la norme est invariante !
Malicia : C'est quoi la norme ?

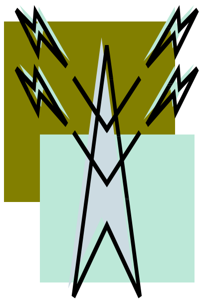
Neurino : Rappelles toi : $ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2+dy^2+dz^2)^2$
la norme de V - noté $[V]^2 = ((-\beta^2)^{-1/2})^2(c^2-(v^2_x+v^2_y+v^2_z))$
En développant $[V]^2 = (c^2-v^2)/(1-\beta^2) = c^2$
Malicia : Donc la norme du quadrivecteur vitesse est invariante et vaut = c^2

Le quadrivecteur Energie-Impulsion

Neurino : Oui, à retenir, nous obtenons de la même façon le 4-vecteur énergie-impulsion en multipliant V par m (la masse de la particule ou de l'objet en mouvement) et nous avons alors : $P = mV = (1-\beta^2)^{-1/2}(mc, mv_x, mv_y, mv_z)$
$= (1-\beta^2)^{-1/2}(mc, p_x, p_y, p_z)$

$(1-\beta^2)^{-1/2}.\ p_i$ forment les quantités de mouvement spatiales
et $(1-\beta^2)^{-1/2}mc$ la quantité de mouvement temporelle

Malicia : Je comprends bien $p_i = mv_i$ donc $p = mv$ par définition de l'impulsion ou quantité de mouvement par contre, que fait-on avec la partie temporelle « $(1-\beta^2)^{-1/2}$ mc » ?
Neurino : Depuis L'Electromagnétisme, décrite par Maxwell on sait que la quantité de mouvement ou impulsion d'une particule est égale à E/c son Energie sur la vitesse de la lumière.

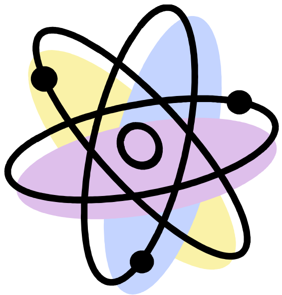


ET Einstein aura une fabuleuse intuition, il va dire que « $(1-\beta^2)^{-1/2}mc$ » la quantité de mouvement du terme temporel c'est la quantité de mouvement interne de la particule ou de l'objet.
Il va donc réaliser l'égalité $(1-\beta^2)^{-1/2}mc = E/c$

Il n'y a pas de véritable démonstration mais c'est probablement la meilleure intuition qu'Einstein ait eue, elle a été par la suite maintes fois démontrée par l'expérience.

$E=mc^2$

Malicia : Donc $E/c = m\,c\,(1-\beta^2)^{-1/2}$ et $E = mc^2/(1-\beta^2)^{1/2}$; $E = mc^2/(1-\beta^2)^{1/2}$ ça ne ressemble pas à la célèbre formule $E= mc^2$
Neurino : Non, pas tout de suite il faut un peu développer mais tu peux voir que pour les vitesses relativement faibles devant c et par approximation $(1-\beta^2)^{-1/2} \approx 1 + 1/2\,\beta^2$
Malicia : Donc $E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$

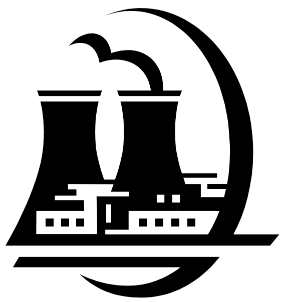


Neurino : Et voila une sacrée découverte…L'Energie d'une particule de masse m c'est une partie fixe : mc^2 et une partie variable $1/2mv^2$ qui dépend de la vitesse de la particule.
Malicia : $1/2mv^2$ cela ressemble à l'Energie cinétique.
Neurino : Parfaitement, on peut dire que l'Energie totale d'une particule, c'est son Energie interne aussi appelée Energie de masse invariante + son Energie cinétique qui dépend de sa vitesse et du repère.

Malicia : Pour une vitesse nulle nous avons donc $E_0=mc^2$.
Neurino : On peut même dire $E_0=m_0c^2$, m_0 masse invariante.
Malicia : Donc en fait $E/c = m_0 c^2 (1-\beta^2)^{-1/2}$
Neurino : et si tu poses $m = m_0 / (1-\beta^2)^{-1/2}$
Malicia : La masse augmente donc avec la vitesse ?
Neurino : Non seulement, on peut dire ça, en effet mais si tu remplaces mo dans l'équation tu trouves…
Malicia : **$E=mc^2$**… Eureka.
Neurino : Non Eureka, c'était Archimède.
Malicia : Bon d'accord, mais en quoi cette découverte est-elle si importante ?
Neurino : As-tu une idée de l'Energie de masse contenue dans une masse de 1Kg ?

Equivalence Masse-Energie

Malicia : Ca se calcule $E_0=m_0c^2=1*3*10^8*3*10^8=9*10^{16}$ Joules C'est énorme !
Neurino : Oui soit 90 millions de milliards de joules ou 25 Téra wattheures (TWh) Soit de quoi fournir la France en électricité pendant un peu plus d'un mois

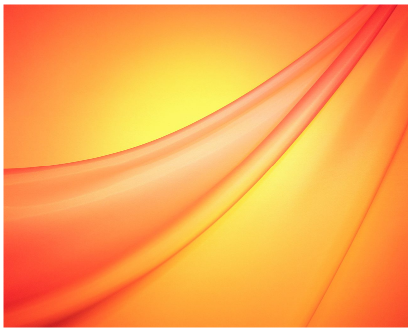


Malicia : Ouah…..par contre je présume que la difficulté est d'aller extraire cette Energie
Neurino : Tu as tout compris, on y arrive cependant en cassant de gros atomes qui se recomposent en atomes plus petits et en libérant l'excès de masse en Energie sous forme de chaleur.
Malicia : C'est le principe utilisé dans les centrales électronucléaires.
Neurino: C'est aussi le principe utilisé dans une bombe atomique hélas…nous en reparlerons un jour si tu veux.

Malicia : Oui bien sûr … et dans le soleil. c'est le même principe ?
Neurino : C'est différent dans le soleil c'est la fusion d'atomes plus légers, notamment d'hydrogène qui en se transformant en hélium libère de l'énergie..
Malicia : Pourquoi ne pas reproduire la fusion sur Terre ?
Neurino : On l'a fait avec la bombe thermonucléaire mais ce qu'i faut, c'est une fusion maitrisée et les conditions de températures et de pressions ne sont pas encore reproductibles sur Terre, le projet ITER est conçu pour étudier cette possibilité.

Malicia : Et bien cette découverte aura bouleversé le 20ème siècle, et rien qu'en partant de la vitesse de la lumière. A ce propos, la lumière est composée de photons or ce sont des particules. Comment des particules peuvent-elles voyager à la vitesse c ?

Le cas particulier des Photons



Neurino : Nous avons vu que $p = mv$ et que $E = mc^2$
De ces expressions on peut tirer $p = Ev/c^2$.
Te rappelles-tu de la norme d'un 4-vecteur ?
Malicia : Oui pour le 4-vecteur vitesse c'est : c^2
Neurino : Et pour le 4-vecteur impulsion ?
Malicia : Comme $P = m\,V$, peut-on dire que $[P]^2 = m^2\,[V]^2 = m^2c^2$?
Neurino : Oui bien sûr, mais le 4 vecteur impulsion c'est aussi $P = (E/c\ ,\ p)$ et alors sa norme est aussi ?

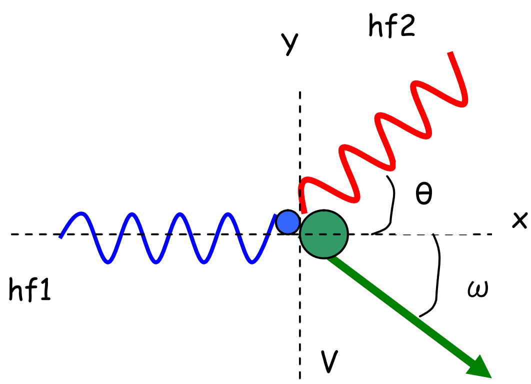
Malicia : $E^2/c^2 - p^2$ qui est donc égal à m^2c^2
Neurino : Donc $m^2 = (E^2 - p^2c^2)/\ c^4$, et $p = Ev/c^2$, avec ça, tu as les moyens de répondre à ta question « Comment des particules comme les photons peuvent-elles voyager à la vitesse c ? »
Malicia : Voyons ! Si $v = c$ donc $p = E/c$, $p^2 = E^2/c^2$ d'où $m^2 = 0$…
la masse est nulle !
Neurino : Bravo c'est ce qu'il fallait démontrer, la masse d'une particule circulant à la vitesse de la lumière comme le photon est forcément nulle

Malicia : Et inversement si la masse est nulle alors
$E^2 = p^2c^2$ $p=E/c = Ev/c^2$ et v=c.
Neurino : Parfait, un photon à une masse nulle et sa vitesse est invariable et égale à c.
Malicia : Cà c'est fort !

L'effet Compton

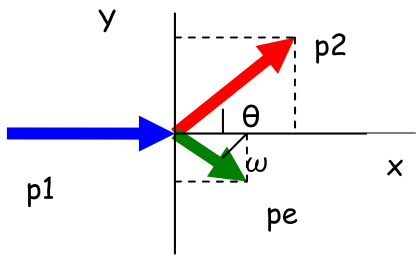
Neurino : Remets-toi, je te propose pour finir de te détailler l'expérience réalisée par Arthur Compton en 1927 sur la conservation de la quantité de mouvement relativiste, ce qui confirma la réalité de la relativité restreinte. Cela lui valu le prix Nobel
Malicia : Le prix Nobel pour vérifier la relativité alors qu'Einstein ne l'a pas eu pour cela ? C'est assez injuste.
Neurino : Le scepticisme du début du siècle était notoire, les esprits n'étaient pas prêts, évictant Einstein du prix Nobel malgré des recommandations.
Malicia : Dommage, alors Compton ?

Neurino : Un photon d'énergie hf1 est projeté sur un électron immobile de masse m. Le photon cède une partie de sa quantité de mouvement à l'électron en lui faisant subir un recul à la vitesse V dans une direction faisant un angle ω avec le photon incident. Le photon rebondit sur l'électron en perdant de l'énergie donc avec une fréquence telle qu'E2 =hf2 avec f2<f1 et avec un angle θ
Malicia : L'énergie d'un photon est égale à hf alors ?



Neurino : Oh excuses-moi, je grille les étapes en effet, l'Energie transportée par un photon vaut hf, h la constante de Planck et f la fréquence de l'onde associée, nous verrons cela une autrefois si tu veux.
Malicia : Bien sûr, mais revenons à notre choc des mondes.
Neurino : Compton fit des tas de mesures en les comparant aux résultats donnés par la mécanique classique, mais ces résultats ne correspondaient pas aux mesures.
Malicia : Car les vitesses sont relativistes !

Neurino : Et oui, c'est facile à dire aujourd'hui, bon faisons le bilan de conservation des quantités de mouvement sur l'axe x



Malicia : p1 (impulsion du photon incident sur x) = p2 cosθ (projection de l'impulsion du photon diffusé sur x) + pe cos ω (projection de l'impulsion de l'électron sur x)

Neurino : et sur y ?

Malicia : La projection de p1 est nulle donc 0=p2 sinθ – pe sinω

Neurino : Très bien, on en déduit que $pe^2=p1^2+p2^2-2p1p2\cos\theta$. Passons maintenant à la conservation de l'Energie

Malicia : Sous forme relativiste ?

Neurino : Cela va de soi, car nous voulons montrer la réalité de cette théorie.

Malicia : Il faut donc tenir compte de l'Energie de masse.

Neurino : Très juste, allez, je t'aide, pour le photon E1=p1.c et E2= p2.c. Pour l'électron au repos $E_0 = m_e c^2$ et pour l'électron à la vitesse v, nous avons vu que $E_e^2-pe^2c^2= m_e^2c^4$ donc…

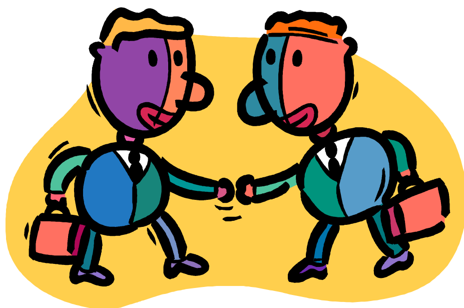
Malicia : $p1\,c + m_e c^2= p2\,c + (m_e^2c^4 + pe^2c^2)^{1/2}$

Neurino : D'où l'on tire $pe^2= (p1-p2)^2+ 2m_e c\,(p1-p2)$

Malicia : Or nous avons vu que $pe^2=p1^2+p2^2-2p1p2\cos\theta$

Neurino : Effectivement, en développant et en remplaçant p1 par hf1=h/Λ1 (Λ est la longueur d'onde) et p2 par hf2 = h/Λ2 on trouve que : $\mathbf{\Lambda 2-\Lambda 1=h(1-\cos\theta)/\ m_e c}$

Malicia : Concrètement cela signifie que le photon diffusé aura une longueur d'onde inférieure de h (1-cosθ) / $m_e c$ à la longueur d'onde incidente.



Neurino : Exactement et cela se vérifie EXPERIMENTALEMENT et confirme le bien fondé de la théorie de la relativité restreinte.

Le scepticisme disparut et les physiciens se réconcilièrent

Malicia : Et tout fut parfait dans le meilleur des mondes

Neurino : Ca c'est vite dit car les sujets de discorde étaient encore nombreux ne serait-ce que celui de la mécanique quantique dont le premier des plus septique était Einstein…

Malicia : Là je me sens relativement fatiguée, mon espace-temps se rétrécit, mes pupilles se dilatent, il est temps d'étendre confortablement ma longueur sur un bon lit de référence.
Neurino : Fais de beaux rêves et au revoir ma petite Malicia
Malicia : Au revoir et merci mon cher Neurino.

Diffusion

J'autorise et j'encourage la diffusion et la reproduction de ces documents.
Je sais qu'ils peuvent rendre service et aider à comprendre des points qui pour certains semblent « nébuleux » et qui pourtant sont en fait relativement simples !
Notamment abordés sous cette forme pédagogique utilisée en son temps par Galilée avec ses personnages «Salviati» et «Simplifia» pour expliquer l'héliocentrisme.

Par contre je vous remercie de bien vouloir me communiquer en retour vos avis, vos remarques, vos critiques tant positives que négatives afin que je puisse apporter toutes les améliorations possibles pour que Neurino et Malicia puissent continuer à répondre à toutes vos questions et à bien d'autres ?

Alain Bellevergue

Adresse mail pour envoyer avis, pour demander à être sur la liste de diffusion ou demander un numéro déjà paru : al.bellevergue@orange.fr

Bibliographie et Illustrations :

Clipart : http://office.microsoft.com/fr
Wikipedia: http://fr.wikipedia.org

Les numéros parus:

PHYSIQUE
P1 : La gravité
P2 : La lumière en couleurs
P3 : Les ondes électromagnétiques
P5 : La relativité restreinte
P6 : La relativité générale
P9 : La mécanique quantique

Les numéros en préparation :

PHYSIQUE
P4 : La lumière onde ou particule
P7 : La matière
P8 : L'Univers

MATHEMATIQUES
M1 : Gradient – Divergence - Rotationnel

P5 : La relativité restreinte

M2 : Les dérivées et Intégrales

ECONOMIE

E1 : La croissance - PIB

E2 : La monnaie - Inflation