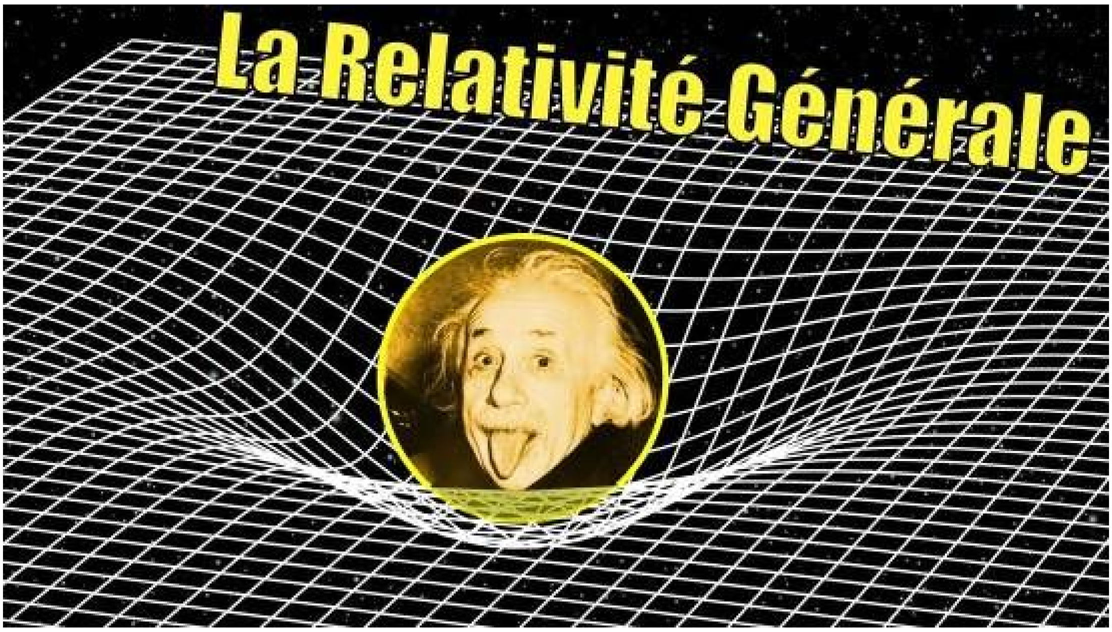
En toute simplicité...

Physique



La relativité générale

LCDLC-P6 ed102020
Auteur : Alain Bellevergue
al.bellevergue@orange.fr

Malicia et Neurino sont deux amis qui aiment particulièrement discuter de sujets les plus variés, de la physique à l'économie en passant par les mathématiques, rien ne les arrête. Malicia, un peu plus jeune est curieuse de tout. Futée ses questions parfois inattendues, permettent d'éclairer les sujets traités sous des angles surprenants.
Elle joue le rôle du candide et n'a qu'un souhait : Comprendre.

Neurino possède une plus grande expérience et il aime transmettre ses connaissances notamment à son amie Malicia. Il joue le rôle du professeur.

Nos deux compères, en toute simplicité et en toute complicité, nous emmèneront explorer des sujets divers et toujours passionnants.

Le monde est mystère, nous sommes un mystère et l'homme cherche inexorablement à percer le fonctionnement de son univers. Il bâtit les théories les plus folles pour expliquer le monde, et quand il pense avoir atteint son but, de nouvelles découvertes viennent bousculer ses certitudes.

La physique est l'une des sciences qui obsède les esprits les plus ardus. De l'infiniment petit à l'infiniment grand, les lois de la nature rythment l'expansion des galaxies et règlent la valse des électrons.

Bien sûr qui dit physique dit aussi mathématiques. Les matheux pourront se faire plaisir, mais, que les autres se rassurent, nos amis Malicia et Neurino développeront les conclusions des calculs dans ce qu'ils ont de plus remarquables sans torturer vos méninges.

Partons à l'aventure et laissons la parole **à Malicia et Neurino**.

Aujourd'hui **: La relativité générale.**

Nous verrons que, TOUT est vraiment relatif y compris les repères en mouvement accéléré.
Mais surtout, comment la masse parvient à déformer l'espace, venant bousculer les lois de Newton. Einstein s'en excusera !

Avertissement :

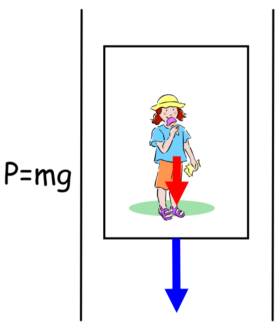
Il est utile bien que non totalement nécessaire d'avoir lu « La relativité restreinte. » avant de lire « La relativité générale. ».

Tout est vraiment relatif.

Malicia : Bonjour Neurino, c'est bien haut chez toi heureusement que l'ascenseur fonctionne.

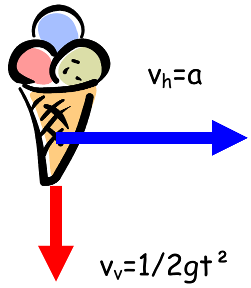
Neurino : Bonjour Malicia, oui tu as raison, cet ascenseur est aussi très rapide.
Malicia : En effet, on se sent « pressé » vers le sol quand on monte.
Neurino : Tu sais que c'est l'ascenseur qui a inspiré Einstein pour bâtir sa théorie sur la relativité générale.
Malicia : Diantre ! En quoi ce lieu de fantasmes l'aura t-il inspiré ?

Neurino : Oh Malicia ! Ce lieu, comme tu dis, est un parfait repère que nous pouvons soumettre à une accélération. Que se passe-il si l'on sectionne le câble qui retient l'ascenseur ?
Malicia : L'ascenseur tombe en chute libre, avant de se fracasser sur le rez-de-chaussée mais quelle idée !



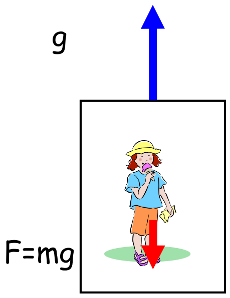
Neurino : Imagine que l'ascenseur soit très haut et qu'on le freine avant l'arrivée au rez-de-chaussée pour éviter tout danger. Tu te trouves dans l'ascenseur, tu tiens un cornet de glace à la main, que se passe-t-il durant la chute libre ?
Malicia : Depuis Galilée on sait que tous les corps chutent à la même vitesse donc dans l'ascenseur je ne bouge pas.
Neurino : Bien et maintenant tu lâches ta glace.
Malicia : Elle aussi chute à la même vitesse, elle reste donc immobile à coté de moi.

Neurino : Parfait ! Continuons à jouer avec cet exercice de pensée dont raffolait Einstein. Tu donnes une pichenette à ta glace.



Malicia : Elle continue à chuter à coté de moi, mais s'éloigne de moi à vitesse constante induite par la pichenette.
Neurino : En effet, l'ascenseur en chute libre devient donc un repère dans lequel les objets sont immobiles mais qui réagissent aux lois de la mécanique.
Malicia : Une idée extravagante me vient à l'esprit ! Si au lieu de laisser « tomber » l'ascenseur, on l'emmène dans l'espace, hors du champ terrestre et qu'on lui applique une accélération vers le haut égale à g.

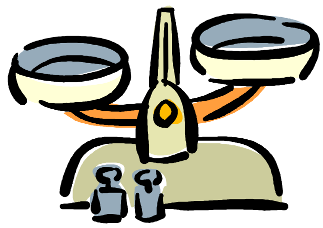
Neurino : **Oui**, oui tu es bien partie, continue ton raisonnement, que se passe-t-il ? Qu'en conclus-tu ?



Malicia : En principe, je suis plaquée sur le sol avec une force F=mg. Mais mg c'est aussi le poids que j'aurais sur Terre !
Neurino : C'est exact, tu ne pourrais pas faire la différence entre un ascenseur animé d'un mouvement uniformément accéléré dans l'espace et un ascenseur arrêté dans le champ gravitationnel terrestre.
Malicia : En d'autres termes, même dans un repère non inertiel, les mouvements sont réversibles donc relatifs.

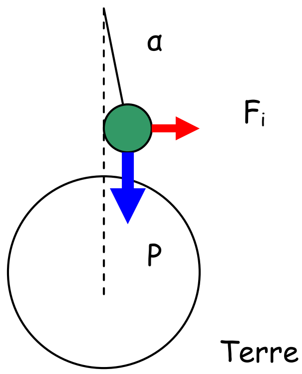
Neurino : Cela demande quelques précautions, mais oui, tout est relatif, même dans un repère non inertiel. C'est le début de la relativité générale.

Masse pesante = masse inerte



Malicia : Précautions ? Quels types de précautions ?
Neurino : En affirmant P = F tu admets que ta masse pesante sur Terre P = $m_p g$ est égale à ta masse inerte F = $m_i g$ dans l'espace.
Malicia : Oui cela me parait évident.

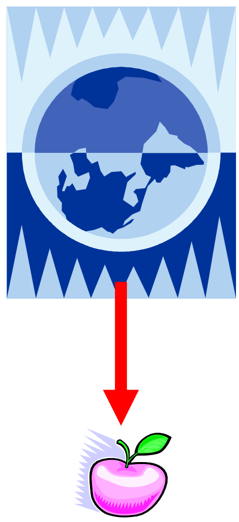
Neurino : Et pourtant nous avons défini séparément, le poids comme étant le produit d'une constante m par la gravité g et une force comme étant le produit d'une constante m par une accélération. Jamais, nous n'avons dit que ces masses étaient équivalentes.



Malicia : Ma foi, c'est bien vrai.
Neurino : Rassure-toi, des expériences très précises montrent l'égalité mais il n'existe aucune démonstration mathématique de cette égalité.
Malicia : Quelles expériences ?
Neurino : En voici une parmi d'autres. Soit un fil à plomb dont la masse m est soumise à son poids et à une force d'inertie induite par la force centrifuge de la Terre. On remarque que l'angle α est le même quelle que soit la composition de la masse.

Malicia : Le rapport de la force et du poids sont invariants donc $m_p = m_i$, J'en étais sûre !
Neurino : Ne sois pas moqueuse. Cette vérification était nécessaire avant d'énoncer le principe d'équivalence.

Le principe d'équivalence.

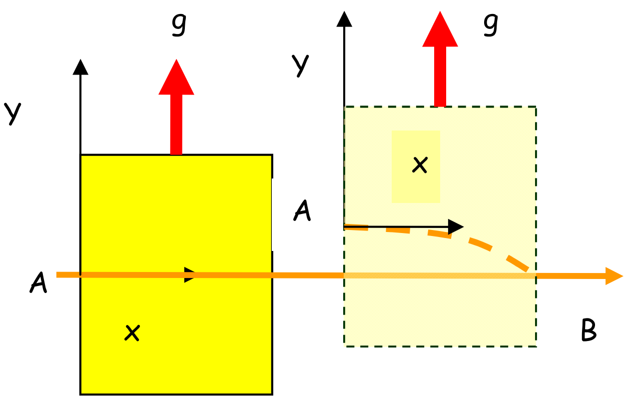


Malicia : Quel est-il ce fameux principe d'équivalence ?
Neurino : C'est assez simple. Tu l'as pratiquement deviné : tout champ de gravitation est équivalent à un repère non inertiel donc accéléré.
Malicia : Donc la loi de Newton est réversible.
Neurino : Comment donc ?
Malicia : Ben oui ! on peut dire que ce n'est pas la pomme qui tombe sur la Terre, mais la Terre qui se dirige vers elle avec une vitesse uniformément accélérée, d'accélération g.
Neurino : C'est surprenant comme illustration, mais c'est tout à fait cela.
Malicia : Tu as une autre définition ?

Neurino : On peut dire qu'un observateur enfermé dans une boîte ne fera pas la différence entre la boîte plongée dans un champ de gravitation et un mouvement accéléré de la boîte.
Malicia : C'est bien ce que je voulais dire. Mais dis-moi Neurino, comment réagissent les rayons lumineux dans un tel référentiel ?

Et la lumière ?

Neurino : Il suffit de les visualiser. .. Imaginons un rayon lumineux entrant par le point A dans l'ascenseur qui est uniformément accéléré dans l'espace.
Malicia : Le rayon se dirige en ligne droite.
Neurino : Et dans l'ascenseur, comment un observateur voit le rayon ?
Malicia : L'ascenseur étant en mouvement, le rayon sortira par le point B en décrivant une courbe.



Neurino : En effet dans l'ascenseur, la lumière parcourt l'axe x tel que x = ct. Et l'axe y tel que $y = -1/2gt^2$.
Malicia : Donc $y = -x^2/2gc^2$
Neurino : Nous avons là une observation capitale : dans un repère soumis à une accélération uniforme les rayons lumineux sont courbés. Que pouvons-nous en déduire en appliquant le principe d'équivalence ?
Malicia : Si on applique le principe d'équivalence, un rayon lumineux devrait être dévié par un champ de gravitation.

Neurino : Exactement, et ce fut là que le génie d'Einstein se révéla. Il eut l'intuition **qu'une masse déformait l'espace et le temps.** En conséquence les rayons lumineux ne faisaient que suivre cet espace courbé.

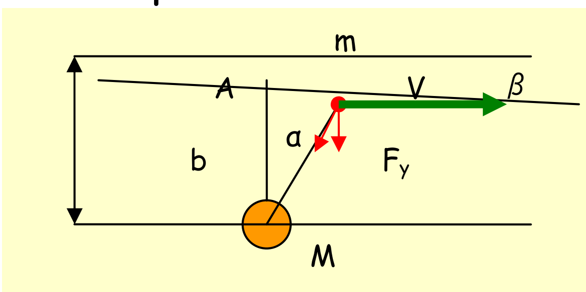
Malicia : Peut-on mesurer cette courbure ?

Neurino : On démontre qu'une particule m de vitesse V passant à une distance b d'une Masse M est déviée d'un angle de $2GM/bv^2$.

Le coin des matheux

Démonstration

Déviation d'une particule de masse m de vitesse v par une masse M.



L'angle β (très agrandi sur le dessin) est en fait très petit ce qui permet plusieurs approximations :

1 : $\sin\beta \approx \beta = V_y/V = mV_y/mV = P_y/mV$

Malicia : Donc pour un rayon lumineux
$V = c$ et la déviation vaut : $2GM/bc^2$

Neurino : C'est en effet ce que conclut Einstein en 1907 en calculant la déviation d'un rayon rasant le soleil soit 0,87 seconde d'arc, or les observations montrent que le résultat est le double soit 1,'75 seconde d'arc, Il y a donc un problème. Le résultat de cette observation sera confirmé ensuite par la théorie de la relativité générale démontrant sa pertinence. Nous y reviendrons si tu veux bien.

2 : $MA \approx b$, considérant MAm rectangle avec $\hat{A}$ droit pour pouvoir appliquer Pythagore.

D'où :
$Am = Vt$
$F = GMm/(V^2t^2+b^2)$
$\cos\alpha = Fy/F = b/(V^2t^2+b^2)^{1/2}$
L'angle α varie de $-\pi/2$ à $+\pi/2$
Donc:
$Fy = GMmb/(V^2t^2+b^2)^{3/2}$

Or $P_y = m\,V_y = \int m\, dV_y/d\,t = \int m\gamma_y = \int F_y$

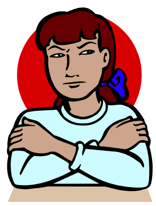
Sachant que $= \int_{-\infty}^{+\infty} dx/(x^2+a^2)^{3/2} = 2/a^2$

$\int GMmb/(V^2t^2+b^2)^{3/2} = 2GMm/bV$

Donc $\beta = P_y/mV = 2GM/bV^2$

Un point de vue strictement local.

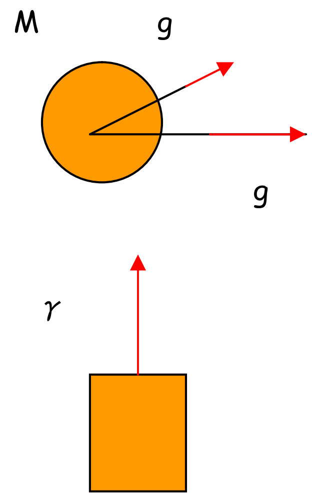
Malicia : Einstein se serait-il trompé dans ses calculs ?



Neurino : En fait dans ce calcul on suppose le champ gravitationnel constant, or le principe d'équivalence ne s'applique que localement.

Malicia : Tu veux dire que le champ gravitationnel, $P = M\,g$ avec $g = G\,M_T/d^2$ g n'est pas constant (M_T : masse de la Terre, d distance à la Terre)

.



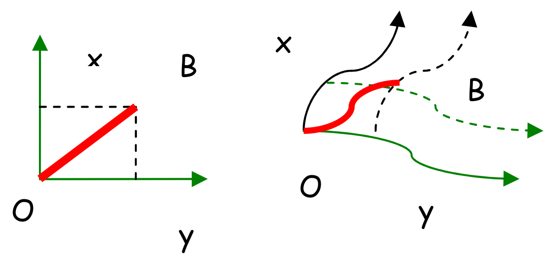
Neurino : En effet, ni en sens ni en intensité. g est un champ radial dont le sens est orienté vers le centre de la masse correspondante et dont l'intensité dépend de la distance.
Malicia : Mais en quoi cette inconstance ne permet pas d'appliquer le principe d'équivalence ?
Neurino : Je n'ai pas dit qu'elle ne le permettait pas mais que ce principe n'était juste que localement. Comment peux-tu remplacer dans une zone assez large, un champ de gravitation par définition radial par un champ de forces produit par un mouvement accéléré ?
Malicia : Vu comme cela, en effet à moins d'avoir un champ de forces tordu je ne vois pas très bien.

Neurino : Il faut retenir que l'équivalence ne s'applique que point par point localement. Pourtant tu ne crois pas si bien dire en disant « tordu » car cela revient à examiner ce qui se passe autour de chaque point.
Malicia : En fait un champ de gravitation et un champ de forces sont différents, par contre localement une force de gravitation peut être égale à une force d'inertie.
Neurino : Formidable ! Je n'aurais pas dit mieux. Mais revenons à la géométrie locale.
Malicia : Mais dis-moi en quoi le champ de forces est-il tordu ?

Un peu de géométrie non euclidienne.

Neurino : Imagine que nous courbions un repère orthonormé euclidien (Ox, Oy).

Malicia : Comme une feuille de papier que l'on ondule.
Neurino : Exactement, tu remarqueras que grâce aux coordonnées, nous pouvons repérer tout point de cette surface courbe.
Malicia : Sauf qu'il n'y a plus de droite par définition.



.

Neurino : Bien vu, mais alors comment est traduite une droite du repère euclidien dans le repère courbé ?
Malicia : Naturellement par une courbe.

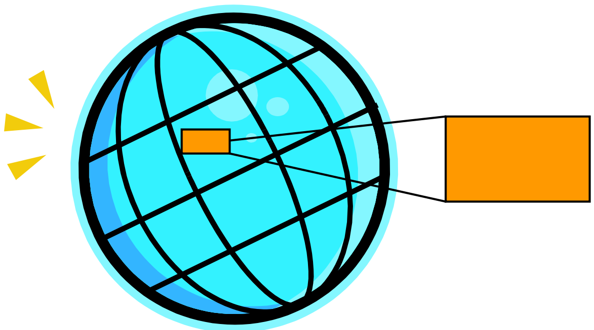
Neurino : Effectivement, mais cette courbe est particulière, comme pour la droite c'est le plus court chemin du point A au point B. On l'appelle géodésique.
Malicia : Mais les règles changent. La droite n'est plus le plus court chemin, la somme des angles d'un triangle ne fait plus 180°.
Neurino : Nous sommes dans une géométrie non euclidienne. Allons un peu plus loin, si nous avons une particule libre parcourant l'espace euclidien de départ.
Malicia : Cette particule décrit un mouvement rectiligne uniforme. C'est le principe d'inertie, donc une droite dans ce repère euclidien.
Neurino : C'est parfait, nos échanges te sont profitables. Cette particule décrit donc une géodésique dans le repère courbé non euclidien correspondant.

La généralisation du principe d'équivalence.

Malicia : Mais où veux tu en venir ?
Neurino : Je veux montrer qu'au voisinage de la particule, la projection de la trajectoire dans un plan tangent est aussi une courbe.
Malicia : En voilà une nouvelle ! Cela me fait une belle jambe.
Neurino : C'est pourtant élémentaire mon cher Watson, si la trajectoire est courbe, c'est que dans ce plan la particule subit des forces, comme dans tout mouvement de rotation.

Malicia : Donc une accélération.
Neurino : Et cela permet 2 observations :
1-Il est possible de transformer un mouvement rectiligne uniforme dans un repère euclidien en mouvement accéléré dans un repère non euclidien.
2-Le principe d'équivalence généralisé permet donc d'y faire correspondre un champ de gravitation.
Malicia : Mais cela que localement comme tu l'as précisé.

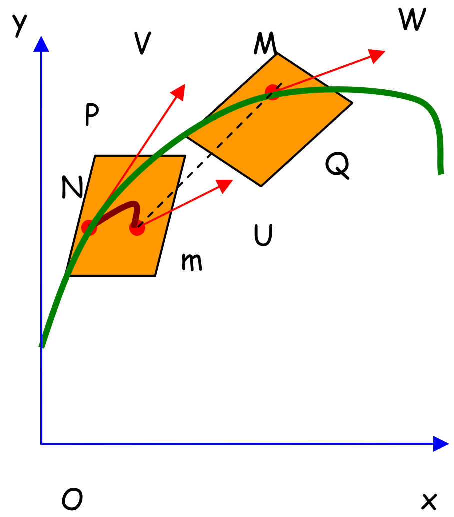
Neurino : En effet, pour mieux comprendre cette limitation, tu imagines la surface de la Terre, localement, tu peux représenter une petite partie de la Terre sur un plan par contre, il est impossible de représenter la totalité de la surface terrestre sur un seul plan.
Malicia : C'est bien beau cela, mais tu ne m'as pas encore montré qu'au voisinage de la particule la trajectoire était courbe.



Neurino : C'est vrai, réparons ce manque. Soient les plans P et Q tangents à la trajectoire aux points N et M et contenant les vecteurs vitesses. On pourra sur ces plans représenter localement la trajectoire de la particule allant de N à M.

Malicia : Les modules des vitesses V et W sont égaux car le mouvement initial est uniforme.

Neurino : En effet, soit U la projection de W sur le plan tangent P. Nm représente donc le comportement de la particule dans son voisinage. NM étant une géodésique issue d'un mouvement rectiligne, la trajectoire Nm ne peut donc pas représenter une droite dans cet espace plat.



Malicia : Si ce n'est pas une droite c'est donc une courbe.

Neurino : Eh oui ! La présence d'une force dans l'espace courbe fait décrire une trajectoire dite curviligne dans l'espace plat tangent. Encore un indice sur la déformation de l'espace par certaines forces.

La déformation de l'espace par les forces de gravitation

Malicia : Comment les lois de la relativité restreinte : la dilatation du temps, le raccourcissement des longueurs interviennent-elles en relativité générale ?

Neurino : C'est une excellente question sur laquelle Einstein a planché.

Malicia : Ah il est bien cet Albert, il faut dire qu'il était motivé.

Neurino : Ouais…passons, connais-tu le tourniquet ?

Malicia : Oui ce manège sur lequel on est collé sur les parois.

Neurino : C'est cela, sur ce manège les « passagers » ont donc une vitesse circulaire v et aucune vitesse radiale.

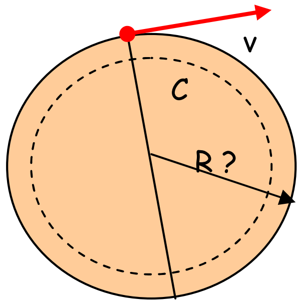
Malicia : Oui je te suis.

Neurino : Là où cela devient intéressant, c'est quand un passager tente de mesurer la circonférence et le rayon avec le même mètre.

Malicia : Quelle idée ! Mais c'est pour le besoin de la cause je suppose.

Neurino : Tu supposes bien. Te souviens-tu que la vitesse semble raccourcir les longueurs dans le rapport $l = lo / (1- v^2/c^2)^{1/2}$ lo étant la longueur au repos relatif.

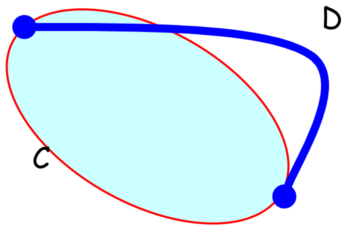
Malicia : Je vois où tu veux en venir, si je mesure la circonférence à la vitesse v et le rayon sans vitesse avec le même mètre, je ne vais pas trouver C (la circonférence) = $2\pi R$ mais
$C^*(1- v^2/c^2)^{1/2} = 2\pi R$



Neurino : Exactement, et comment représenter un cercle dont $2\pi R$ est supérieur à sa circonférence ?

Malicia : Sauf à courber le diamètre pour l'adapter à la circonférence, je ne vois pas trop.

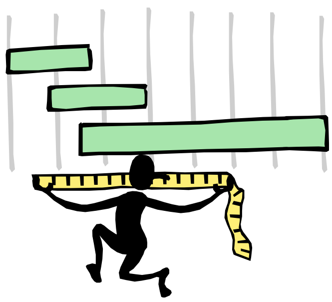
.



Neurino : Que viens-tu de dire ?
Malicia : Euh…quoi…oui ! Le diamètre est trop long pour joindre les bords du cercle, donc je le tords pour le faire entrer.
Neurino : Malicia, tu es géniale.
Malicia : Ah bon !
Neurino : Il a fallu bien des années à Albert Einstein pour arriver à cette conclusion, plus élaborée bien sûr.

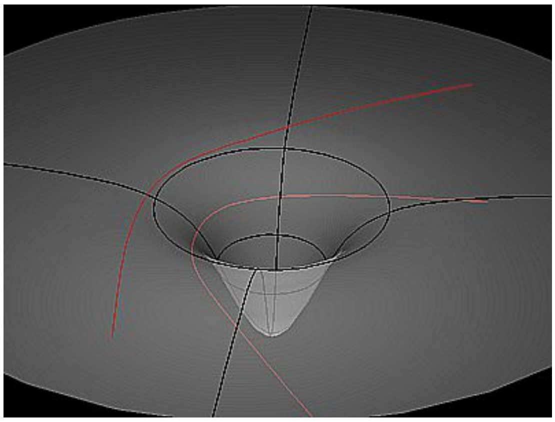
Malicia : Je suis confuse.

Neurino : En effet, le plateau du tourniquet, ou la règle ne change pas de dimension, c'est donc l'espace qui se modifie et se déforme pour répondre aux lois universelles de la physique. Il en est de même pour le temps. Une horloge située sur le bord extérieur du tourniquet sera moins rapide qu'une horloge située au centre.



Malicia : Et alors que dirait Einstein maintenant ?
Neurino : Il dirait que : Pour une particule en rotation, donc subissant une force d'inertie **les lois de la géométrie euclidienne ne s'appliquent plus**

Malicia : Il parle bien Einstein !
Neurino : Ce n'est pas tout, il a dit : les forces d'inertie étant responsables de la géométrie non euclidienne de l'espace et le principe d'équivalence reliant les forces d'inertie aux forces de gravitation…



Malicia : Les forces de gravitation elles aussi sont responsables de la géométrie non euclidienne de l'espace.
Neurino : Exactement ; autrement dit, **c'est la structure même de l'espace qui nous entoure que la gravité, donc la présence d'une masse, détermine.**
Malicia : Alors tout objet, y compris un rayon lumineux ne peut qu'emprunter cet espace

Neurino : En effet, mais rien ne te dérange dans cette description ?

Voilà d'autres dimensions

Malicia : Non, je commence un peu à avoir le vertige mais c'est tout.

Neurino : N'aurais-tu pas l'impression que les univers que nous avons décrits jusqu'à présent sont assez plats.
Malicia : Ah oui, on peut cependant oser dire que les déformations non euclidiennes de cet espace représentent des dimensions supplémentaires.
Neurino : Tout à fait, et si tu regardes autour de toi, as-tu l'impression d'un monde plat ?

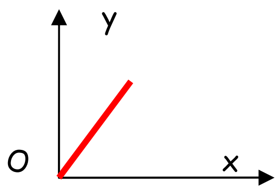
Malicia : Ça y est, j'ai compris. Notre monde est en trois dimensions, il faut donc que les déformations cette-fois-ci de l'espace non euclidien se fassent dans des dimensions que nous ne pouvons pas nous représenter !

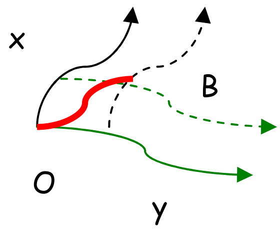
Neurino : Nous y voilà, l'espace est déformé par la gravitation donc par la présence de matière. Par contre notre esprit tridimensionnel ne peut pas se représenter cette déformation qui fait intervenir d'autres dimensions. C'est pour cette raison que nous raisonnons souvent à 2 dimensions afin de « voir » les déformations dans la troisième dimension.

Malicia : C'est l'espace-temps que nous avons vu en relativité restreinte.
Neurino : On peut dire que l'espace-temps de la relativité restreinte est un cas particulier de cet espace non euclidien.

Revenons à la géométrie non euclidienne

Malicia : Tu veux dire que le « $ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2+dy^2+dz^2)$ » c'est-à-dire la distance dans l'espace temps que nous avons vu en relativité restreinte n'est qu'un cas particulier de la relativité générale ?
Neurino : En effet, il correspond à un espace plat. Pour mieux comprendre revenons à un espace à 2 dimensions. Pour un espace euclidien nous avons $OB^2 = x^2 + y^2$ (le bon vieux Pythagore), par contre dans un espace non euclidien nous aurons $OB^2 = X^2 + Y^2 + aXY + bYX$





En considérant e_i et e_j les vecteurs unitaires de la base OXY on peut mettre cette expression sous forme de tenseur $T = T^{ij}\, e_i \otimes e_j$ ici i et j variant de 1 à 2. Cela correspond simplement aux composantes d'un vecteur de 4 cordonnées.

Malicia : Ah, je vois $X^2 + Y^2$ est un cas particulier de $X^2+Y^2+ aXY+ bYX$

Neurino : Exactement, et en revenant aux 4 dimensions de l'espace-temps.

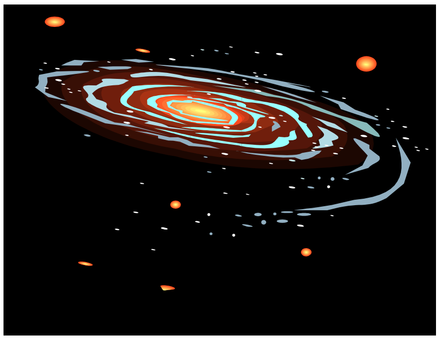
$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2+ dy^2 + dz^2)$ est un cas particulier de $ds^2 = T00c^2dt^2 - T11dx^2 - T22dy^2 - T33dz^2 + T01cdtdx + T02cdtdy + T03cdtdz + T12dxdy + T13dxdz + T10dxcdt + T20dydx + T21dydx + T23dydz + T30dzcdt + T31dzdx + T32dzdy$

Malicia : Alors là, je suis effarée, d'où sort cette suite de termes plus alambiqués les uns que les autres ?

Neurino : Ne le sois-pas, c'est un simple produit vectoriel, les Tij sont les coefficients du produit : (cdt-dx-dy-dz) par (cdt-dx-dy-dz) pour décrire les déformations de l'espace-temps.

Malicia : Soit 4 fois 4 = 16 termes. Je comprends que l'écrire sous forme d'un tenseur soit plus simple nous avons donc $T = T^{ij}\ e_i \otimes e_j$ mais dans ce cas i et j variant de 1 à 4.
Neurino : C'est bien cela, tu vois que ce n'est pas compliqué. Ce tenseur est une représentation locale et mathématique de la déformation de l'espace-temps.

Malicia : Comme cette déformation est produite par la masse donc l'Énergie, il faudrait faire correspondre à ce tenseur les manifestations de cette Énergie.
Neurino : Bien vu, mais il a fallu plus de 10 ans à Einstein pour y parvenir. Il lui fit correspondre pour cela le tenseur Énergie-impulsion



Le Tenseur Énergie-impulsion

Malicia : Le tenseur Énergie-impulsion ? Cela a-t-il un rapport avec le quadrivecteur Énergie-impulsion que nous avons vu en relativité restreinte soit (E/c,px,py,pz)

Neurino : Oui, il s'en déduit : $T^{uv} = \rho u \otimes u$ avec u = (c, vx, vy, vz) = 1/m (E/c, px,py,pz) et ρ = m/V la masse volumique. Je te passe les détails de sa construction car les démonstrations sont très longues et en partie intuitives. C'est encore une fois l'observation qui confirmera la théorie.

Malicia : Tu m'en vois ravie mais comment est-il fait ce tenseur ? Il a 16 termes je présume.

Neurino : 'Évidemment pour respecter l'égalité, ce tenseur représente la répartition de l'Énergie ou de la masse dans l'espace-temps sous forme de matrice il se présente sous la forme :

$$T = T^{uv} = \begin{bmatrix} T00 & T01 & T02 & T03 \\ T10 & T11 & T12 & T13 \\ T20 & T21 & T22 & T23 \\ T30 & T31 & T32 & T33 \end{bmatrix}$$

=

$$T = 1/m\ T^{u} = \begin{bmatrix} E^2/c^2V & pxE/cV & pyE/Vc & pzE/cV \\ Epx/cV & px^2/V & pxpy/V & pxpz/V \\ Epy/cV & pypx/V & py^2/V & pypz/V \\ Epz/cV & pxpz/V & pypz/V & pz^2/V \end{bmatrix}$$

Malicia : Donc du $(1/m) * (m^2v^2)/V$ soit du mv^2/V donc de l'Énergie divisée par un volume.

Neurino : En fait tous les termes s'expriment en m $(v^2$ou $c^2)/V$ donc de l'Énergie divisée par un volume mais c'est aussi $m\gamma/S = F/S$ donc une force par une surface soit une pression ou F d/ V aussi une densité de moment.

T01, T02, T03 ce sont des flux d'Énergie dans chacune des directions.

T10, T20, T30 sont des densités de moments soient les forces qui tordent l'espace.

Malicia : Peut-on dire que la première colonne et la première ligne représentent l'impact de la masse donc de l'Énergie sur l'espace temps ?

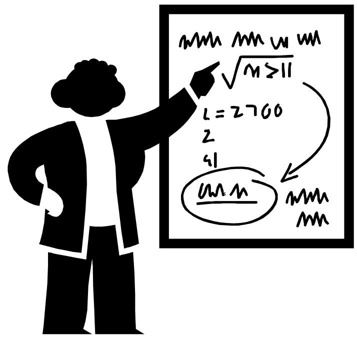
Neurino : C'est bien cela et la sous-matrice 3x3 (T11….T33) restante caractérise les flux de moments. En mécanique des fluides, la diagonale représente la pression (efforts normaux) et les autres termes, la viscosité (efforts tangentiels).

Malicia : Comme si l'espace était un fluide.

Neurino : Exactement, il ne reste plus comme tu le disais qu'à faire correspondre ce tenseur à celui de l'espace temps.
Malicia : Alors là, je cale, je suis dépassée.
Neurino : Ne soit pas désolée, Einstein lui-même a calé. Toutes les idées sont là : le principe d'équivalence, l'invariance d'un changement de référentiel, l'idée que l'Énergie ou la masse déforme l'espace-temps…mais il faut mettre tout cela en équation.
Malicia : Et alors comment y est-il parvenu ?

L'équation de la relativité générale.

Neurino : Il s'est fait aider par un mathématicien hongrois : Marcel Grossmann, un spécialiste de la géométrie différentielle et des tenseurs. Il a su construire une métrique pour décrire l'espace-temps.
Malicia : Une métrique ?



Neurino : C'est un procédé qui permet de mesurer des distances dans un espace multidimensionnel. Bref à force de transformations mathématiques, d'égalité de flux, de conservation d'Énergie ou de masse, de covariance, des propriétés de la mécanique des fluides de symétrie entre accélération et déformation géométrique….Ils sont parvenus à la fameuse équation de la relativité générale.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Malicia : Oh là là ! Ce n'est pas simple.
Neurino : Il faut dire que si dès 1907 Einstein avait une assez bonne idée de l'action de la masse sur la déformation de l'espace-temps, ce n'est que suite à 8 années d'efforts qu'il a abouti à cette formulation.
Malicia : Quels sont les mystères qui se cachent derrière cette équation ?
Neurino : J'allais t'inviter. à les découvrir :

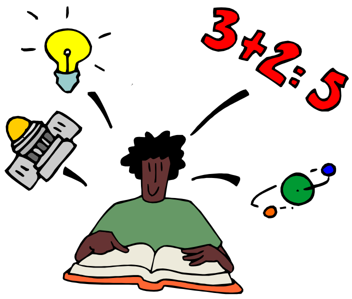
$R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci, il représente la métrique de l'Espace-temps
R est la trace du tenseur de Ricci Il représente la courbure scalaire de l'espace-temps.

$g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique. Il représente la mesure des angles et des distances dans l'espace –temps.

Malicia : Tous ces paramètres matérialisent donc l'espace-temps et je suppose que « c » est la vitesse de la lumière, G la constante gravitationnelle et π notre traditionnel 3,14….reste Λ et $T_{\mu\nu}$.
Neurino : En effet, $T_{\mu\nu}$ est notre tenseur Énergie-impulsion, que nous avons déjà vu et enfin Λ, Einstein qualifia par la suite Λ de l'erreur de sa vie.
Malicia : Je sais, je sais… c'est la constante cosmologique.
Neurino : Je vois que cela t'a 'marquée C'est bien la constante cosmologique.

La constante cosmologique

Malicia : Mais pourquoi l'erreur de sa vie ?



Neurino : En fait, pas si erreur que cela. Einstein était persuadé que l'univers était statique or sans la constante comme nous le verrons l'univers semble en expansion.
Malicia : Je vois, pour compenser cette expansion il introduit dans son équation un terme qui neutralise l'expansion, c'est pour cette raison qu'elle apparaît en négatif.

Neurino : Bien vu, mais c'était sans compter sur Edwin Hubble qui en 1929 montra que les galaxies s'éloignaient les unes des autres. La vitesse d'éloignement étant d'autant plus rapide que les galaxies sont éloignées.
Malicia : En mesurant le décalage vers le rouge de la raie d'hydrogène m'as-tu dit.

Neurino : Excellente mémoire ! Mais l'histoire ne s'arrête pas là…Aujourd'hui on est convaincu que non seulement l'univers est en expansion mais que cette expansion s'accélère sous l'influence d'une Énergie que l'on appelle Énergie sombre.

Malicia : Je ne vois pas le rapport avec la constante.

Neurino : Bien cette constante n'expliquerait plus la stabilité de l'univers en contrecarrant l'effet de l'expansion mais expliquerait au contraire son accélération.
Malicia : Il est quand même fabuleux cet Einstein, même en se trompant il parvient à avoir raison ! Quel homme !

Les dessous d'une équation

Neurino : Bien voyons ce qui se cache derrière cette équation. Si on oublie la constante cosmologique et si l'on pose : $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ que l'on appellera le tenseur d'Einstein.

Malicia : $G_{\mu\nu}$ caractérise la géométrie de l'espace-temps.

Neurino : En effet, en travaillant en unité géométrique on peut aussi poser G=c=1

Malicia : Cela ne modifie que l'unité avec laquelle on exprime la distance et le temps ?
Neurino : Oui essentiellement, Alors on obtient :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

Malicia : Il est alors visible que le contenu masse Énergie traduit par le tenseur Énergie-impulsion déforme l'espace-temps. Mais dis-moi Neurino qui dit équation dit solutions de l'équation. Y en a-t il ?

Neurino : En effet, il y en a plusieurs qui sont autant de descriptions de l'univers. Les solutions sont les tenseurs $g_{\mu\nu}$ 4*4 qui décrivent la métrique locale.

Malicia : En fait les angles et les distances de l'espace-temps en un lieu.

Neurino : C'est bien cela, ce rappel est tout à fait utile.

La métrique de Minkowski

Malicia : Minkowski, nous en avons déjà parlé en relativité restreinte

Neurino : En Effet dans cette métrique l'on considère que nous sommes dans l'Espace vide de toute masse et Energie donc $T_{\mu\nu} = 0$ alors :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Malicia : et en développant on retrouve
$ds^2 = -cdt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

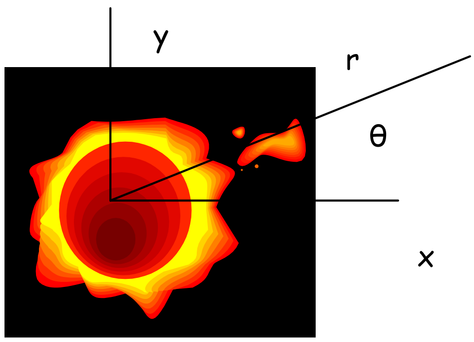
Neurino : Eh oui, l'on retrouve la relativité restreinte qui est bien une forme simplifiée de la relativité générale. Nous sommes dans un univers plat sans déformation.

Malicia : Comme te voilà parti, je suis sûre qu'il y a d'autres solutions.

La métrique de Schwarzschild

Neurino : En effet, exprimée en coordonnées sphériques, la déformation de l'espace-temps par une masse sphérique, comme une étoile donne :

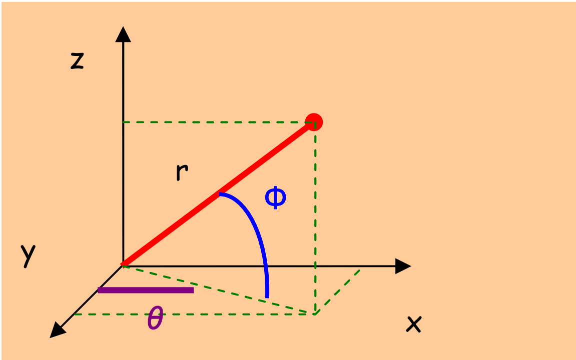
M est la masse de l'étoile
G la constante de gravitation
c la vitesse de la lumière dans le vide
r la distance de l'étoile au point étudié
θ l'angle entre x t r



Alors,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1+\frac{2GM}{rc^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\frac{2GM}{rc^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

Malicia : Que sont les coordonnées sphériques ?
Neurino: Au lieu d'exprimer les coordonnées spatiales par x,y,z, tu les exprimes en r,θ,Φ, et cette fois-ci tu développes le tenseur avec (-cdt, dr, dθ,dΦ) soit :



$$ds^2 = \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2dt^2 - \frac{1}{\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

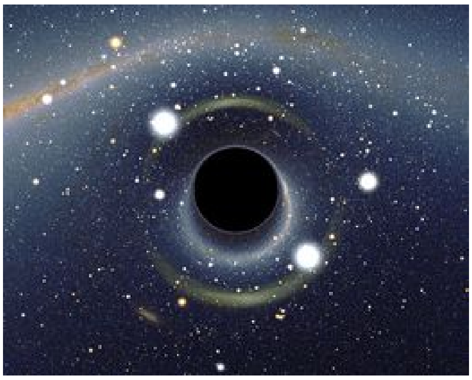
Malicia : Que nous révèle cette équation ?
Neurino: Tu vois que si r est très grand $2GM/c^2r$ tend vers 0 et ds^2 tend vers $c^2dt^2-dr^2$ et $dr^2 = dx^2+dy^2+dz^2$
Malicia : On retrouve donc la métrique de Minkowski.

Le trou noir

Neurino: Ce qui est logique. L'influence du corps massif s'amenuise avec la distance mais ne remarques-tu pas une singularité ?

Malicia : Si pour $2GM/c^2r = 1$ alors $r=2GM/c^2$

Neurino: C'est ce qu'on appelle le rayon de Schwarzschild. Te souviens-tu de notre causerie sur la gravitation ? Quelle était l'Énergie minimum pour s'échapper de l'attraction d'un astre ?



Malicia : Oui je crois il faut que l'Énergie cinétique du corps m à la vitesse v qui tend à s'échapper soit supérieure à l'énergie gravitationnelle.
soit $\frac{1}{2}$ m v^2 > GmM/r

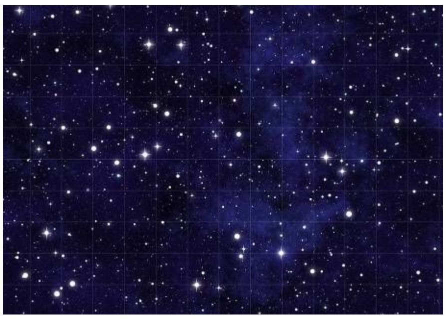
Neurino: En effet, et tu vois que pour une vitesse limite c indépassable,
r = $2GM/c^2$ aucun corps, aucune particule, même pas un photon donc la lumière ne peut s'échapper de cet astre
Malicia : Ne serait-ce pas **un trou noir** ?

Neurino: Effectivement, on retrouve le trou noir dans l'équation d'Einstein. La densité de matière y est fabuleuse. Pour que notre soleil devienne un trou noir, il faudrait que son rayon ne soit que de 1,5 km en gardant la même masse.
Malicia : Ah oui quand même !

La métrique FLRW

Neurino: En fait les solutions de l'équation d'Einstein et toutes leurs subtilités ouvrent la porte de la cosmologie.

Malicia : Je te vois venir. Il y aurait encore d'autres phénomènes qui se cachent derrière cette équation et ses solutions.



Neurino: En effet, la métrique FLRW pour Alexander **F**riedmann (Physicien), Gorges **L**emaitre (Chanoine), Howard-Percy-**R**obertson (Mathématicien), Arthur-Geoffrey-**W**alker(Mathématicien) s'appuie sur un univers localement homogène et isotrope.
Malicia : Homogène ? Ce n'est pas possible car il existe des amas de galaxies donc des zones par définition non homogènes

Neurino: En effet, très bonne remarque, mais émettre cette hypothèse permet des simplifications importantes et ne modifie pas les conclusions sur le modèle cosmologique. D'un point de vue global l'univers est si vaste qu'il peut être considéré comme homogène.

Malicia : Ah, très bien et isotrope…signifie identique dans toutes les directions.
Neurino: C'est bien cela, revenons à la métrique FLRW, en cordonnées polaires la formulation mathématique donne :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$$

$a(t)$ est le facteur d'échelle de l'univers, il traduit une distance mesurée en temps propre en la ramenant au temps séparant 2 objets célestes. En fait il permet de tenir compte de l'expansion de l'univers. H_0 (constante de Hubble) = $a'(t_0)/a(t_0)$. $a(t)$ est définie et positive.

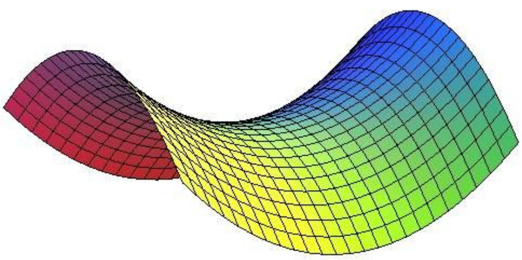
k exprime la courbure spatiale il peut prendre 3 valeurs +1, 0,-1

$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2$ exprime la direction. $d\Omega^2$ sera souvent nul car l'univers est le même dans toutes les directions.

Malicia : Ah ça j'aime, on peut donc simplifier : $ds^2 = c^2dt^2 - a(t)^2dr^2 / (1-kr^2)$

Neurino: Et tu vois que si k = 0, $ds^2 = c^2dt^2 - a(t)^2dr^2$

Malicia : Soit la métrique classique à un facteur prés de l'univers de Minkowski, un espace stationnaire.
Neurino: En effet, prenons maintenant k = -1 ou k = +1, nous avons alors soit un espace ouvert hyperbolique, en forme de selle de cheval, ou alors un espace fermé qui se referme sur lui-même comme la surface d'une sphère.
Quoi qu'il en soit les mesures confirment que l'univers est en expansion.



Le Big-bang

Malicia : Mais si l'univers est en expansion, c'est qu'il y a eu un commencement.

Neurino: Bien sûr, cela signifie que l'univers était contracté et très chaud. Le point de départ est appelé le Big-bang.

Malicia : Donc si nous connaissons le taux d'expansion nous pouvons déterminer l'âge de l'univers.

Neurino: C'est en effet une des méthodes, qui nous donne un âge d'univers situé entre 12 et 13 milliards d'années.

Malicia : Big-bang : grand boum c'est surprenant comme nom !

Neurino: C'est un terme inventé par le physicien Fred Hoyle pour se moquer de la théorie expansionniste à laquelle il ne croyait pas. Mais ce terme représentant bien l'idée du Big-bang fut retenu pour l'exprimer.
Nous reviendrons si tu veux sur le Big-bang qui vaut bien à lui seul une causerie.

Malicia : Bien volontiers ! Cela étant y a-t-il des observations qui permettent de confirmer les lois de la relativité générale ?

La déviation d'un rayon lumineux

Neurino: Bien entendu, la première des confirmations est la déviation des rayons lumineux par le soleil. Te souviens-tu (voir pages 6-7) de combien les lois de newton prédisent l'attraction d'un photon par le soleil ?

Malicia : Oui je crois 0,87 seconde d'arc mais cela ne correspondait pas à ce que l'on observe. L'observation donne le double soit 1,75 seconde d'arc.

Neurino : C'est bien cela. Le calcul à l'aide de l'équation d'Einstein et la solution de Schwarzschild permettent de retrouver cette valeur. (Démonstration ci-dessous que vous pouvez passer mais bel exercice de mathématiques !)

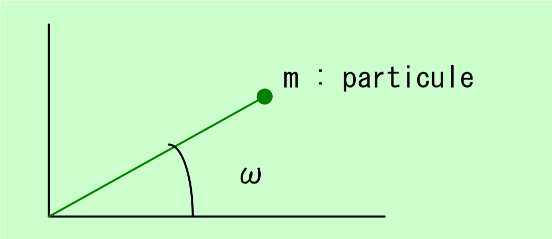
Le coin des matheux……

Déviation d'un rayon lumineux par un corps massif.

Nous sommes dans la métrique sphérique de Schwarzschild dont le résultat de l'équation d'Einstein est :

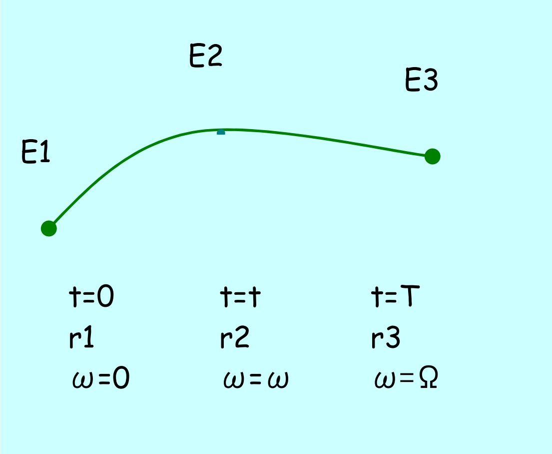
$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2 dt^2 - \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

Nous pouvons simplifier en posant :
$d\omega^2 = (d\theta^2 + \sin^2\theta d\Phi^2)$
en effet la symétrie sphérique rend θ et Φ équivalents.



Un rayon lumineux est composé de photons or les photons parcourent une géodésique et une géodésique correspond à un chemin « s » maximum qui répond à l'équation d'Einstein dans la métrique de Schwarzschild..

Prenons le chemin « s » = E1, E2, E3 du photon m sur sa géodésique.
Nous avons s = s1+s2



***1**-t varie r1, r2, r3 sont fixés, alors :*

$s1^2 = (1-2GM/c^2r1)c^2t^2 + f(r,\omega)$
donc: $2s1ds1 = (1-2GM/c^2r1)c^2 2tdt$
$s2^2 = (1-2GM/c^2r2)c^2(T-t)^2 + f(r,\omega)$
donc:
$2s2ds2 = (1-2GM/c^2r2)c^2 -2(T-t)dt$
s maximum entraine ds/dt = ds1+ds2/dt =0
on en déduit:
$(1-2GM/c^2r1)c^2t/s1 = (1-2GM/c^2r2)c^2(T-t)/s2$

On remarque que les termes du premier membre ne dépendent que de s1 et ceux du 2ème que s2, c'est donc une constante du mouvement, en relativité restreinte on identifie cette constante à E/m (Énergie sur masse de la particule)
En revenant à la forme différentielle : $\boxed{E/m = (1-2GM/c^2r)c^2dt/ds}$

***2**e-maintenant ω varie alors :*

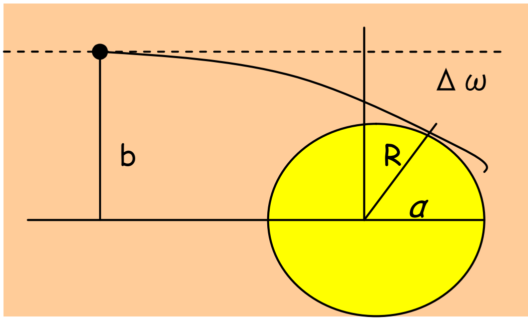
$s1^2 = -r1^2\omega^2 + f(r,t)$ et alors $2s1ds1 = -r1^2 2\omega d\omega$
$s2^2 = -r2^2(\Omega-\omega)^2 + f(r,t)$ et alors $2s2ds2 = r2^2 2(\Omega-\omega)d\omega$

On en déduit (en faisant $ds/d\omega = 0$) : $r1^2\omega/s1 = r2^2(\Omega-\omega)/s2$
nous avons une autre constante du mouvement : le moment angulaire /m = L/m
En revenant à la notation différentielle : $\boxed{L/m=r^2d\omega/ds}$

En remplaçant dt et dω dans la formule de Schwarzschild (et en passant les calculs longs et sans intérêt nous obtenons :
$(dr/r^2d\omega)^2 = E/L)^2 - (1-2GM/c^2r)(1/r^2+m^2/L^2)$
Pour un photon m = 0 : $\boxed{(dr/r^2d\omega)^2 = (E/L)^2 - (1-2GM/c^2r)1/r^2}$

Nous avons l'équation différentielle du mouvement d'un photon
On sait par ailleurs que L = p (impulsion) .x b (distance de la trajectoire rectiligne à la parallèle passant par le centre du Soleil)

Or pour un photon p = E, D'où $(dr/r^2d\omega)^2 = 1/b^2 - (1-2GM/c^2r)1/r^2$
Par définition le rayon rase le soleil, il y est donc tangent et $dr/d\omega = 0$ pour r = R
D'où $1/b^2 = (1-2GM/c^2R)\,1/R^2$
La trajectoire devient :



$(dr/r^2d\omega)^2 = (1-2GM/c^2R)R^{-2} - (1-2GM/c^2r)\,r^{-2}$

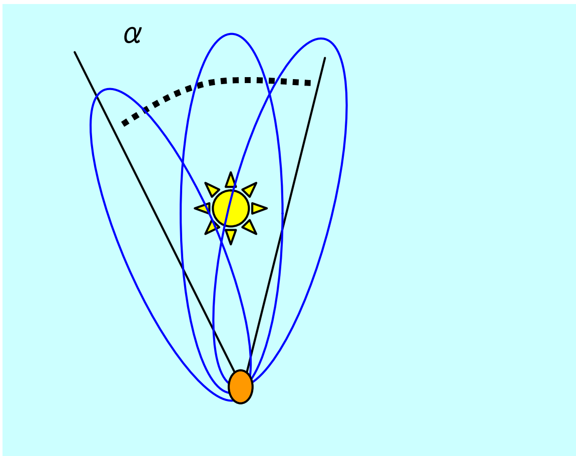
Posons r = R/cosa   r varie de-∞ à +∞ en passant par R
donc a varie de -π/2 à 0 et repart vers π/2..

L'équation devient : $(d\omega/da)^2 = \sin^2 a/(1-\cos^2 a-(2GM/c^2R)(1-\cos^2 a))$
qui conduit à $d\omega = (1-(2GM/c^2R)(\cos a + 1/(1+\cos a)))^{-1/2}da$
On remarque que $2GM/c^2R$ est très petit (10^{-6})
On peut donc faire l'approximation $(1-\varepsilon)^{-1/2} = 1+\varepsilon/2$ soit :
$d\omega = (1 + (GM/c^2R)(\cos a + 1/(1+\cos a)))\,da$
$\omega = [\![a + GM/c^2R(\sin a + \mathrm{tg}\,a/2)]\!]$ *: a variant de π/2..à 0 et de 0 à π/2 l'intégration se fait 2 fois sur l'intervalle 0 π/2*
d'où $\boxed{\omega = \pi + 4GM/c^2R}$ représente le déplacement du photon sur la ligne droite et
donc $\boxed{\Delta\omega = 4GM/c^2R}$ représente bien la déviation d'un photon par un corps massif M, pour le Soleil, Δω = 1,75 seconde d'arc

Malicia : Mais comment ces mesures ont-elles pu être faites ?

Neurino: En 1919 Arthur Eddington, lors d'une éclipse totale, condition nécessaire pour observer les étoiles, en présence du Soleil, mesura en effet un décalage correspondant aux prévisions d'Einstein pour les étoiles dont la lumière rase le soleil par rapport à leur position habituelle sans le Soleil.
Malicia : Je suppose que cela a fait jaser dans le monde scientifique ?

Neurino: Bien au-delà, ce fut le début de la notoriété pour Einstein.
Malicia : Y a t-il d'autres mystères que la relativité générale ait révélés ?
Neurino: Oui, il y a le fameux décalage du périhélie de Mercure.
Malicia : Périquoi ? C'est moi qui me sens toute décalée !
Neurino: Le périhélie est le point où la planète passe au plus près du Soleil. Et on observe un décalage de 5600 secondes d'arc par siècle de variation de l'angle des plans contenant les orbites en début et fin de siècle.
Malicia : C'est probablement dû aux influences des autres planètes…
Neurino: Oui, et cela se mesure à l'aide des lois de Newton. On trouve 5557 secondes d'arc.



Malicia : Soit une différence de 43 secondes.
Neurino: Exact, et par un calcul similaire à celui de la déviation d'un rayon lumineux Einstein à l'aide de la relativité générale montra en 1915 que ces 43 secondes provenaient de la déformation de l'espace-temps par le Soleil.
Malicia : Alors là il n'y a plus aucun doute.

Neurino: Ne nous emballons pas, on peut dire pour le moment que la théorie n'a pas été prise en défaut mais nul ne peut dire ce que sera l'avenir. Cela étant des tests plus modernes sur les pulsars binaires par exemple confirment la théorie de la relativité générale.
Malicia : Si je comprends bien c'est à partir de l'espace et de l'agencement de l'univers que viennent les confirmations de cette théorie.

Neurino: Tu comprends bien, c'est l'ouverture en effet sur la cosmologie.
Malicia : Mais ce sera pour une autre fois car là je suis relativement et généralement fatiguée.
Neurino: Comme tu voudras chère Malicia. Je reste en général et relativement à ta disposition, bon retour.
Malicia : Merci car je suis restée trop longtemps sous tenseur, à bientôt mon cher Neurino.

Diffusion

J'autorise et j'encourage la diffusion et la reproduction de ces documents.
Je sais qu'ils peuvent rendre service et aider à comprendre des points qui pour certains semblent « nébuleux » et qui pourtant sont en fait relativement simples !
Notamment abordés sous cette forme pédagogique utilisée en son temps par Galilée avec ses personnages «Salviati» et «Simplicio» pour expliquer l'héliocentrisme.

Par contre je vous remercie de bien vouloir me communiquer en retour vos avis, vos remarques, vos critiques tant positives que négatives afin que je puisse apporter toutes les améliorations possibles et que Neurino et Malicia continuent à répondre à toutes vos questions ?

Alain Bellevergue

Adresse mail pour envoyer avis, pour demander à être sur la liste de diffusion ou demander un numéro déjà paru : al.bellevergue@orange.fr

Bibliographie et Illustrations

Clipart : http://office.microsoft.com/fr
Wikipedia: http://fr.wikipedia.org

Les numéros parus.

PHYSIQUE

P1 : La gravité
P2 : La lumière en couleurs
P3 : Les ondes électromagnétiques
P5 : Relativité restreinte
P6 : Relativité générale
P9 : La mécanique quantique

Les numéros en préparation.

PHYSIQUE

P4 : La lumière onde ou particule
P7 : La matière
P8 : L'univers

MATHEMATIQUES

M1 : Gradient – Divergence - Rotationnel
M2 : Les dérivées et intégrales

ECONOMIE

E1 : La croissance - PIB
E2 : La monnaie - Inflation