Suite de Fibonacci et valeurs approchées de φ

Contacts : Catherine Dargent (dargent.catherine@free.fr)
Patrick Roudeau (roudeau@lal.in2p3.fr)

Vers les années 1200, Leonardo Fibonacci propose une suite de nombres dont le suivant est la somme des deux qui le précèdent. Si l'on démarre par 0 et 1, la suite est alors : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … Si vous calculez le rapport entre un nombre de cette suite avec celui qui le précède, vous obtenez : 1/1=1, 2/1=2, 3/2=1,5, 5/3=1,66.., 8/5=1,6, 13/8=1,625, 21/13=1,615.., 34/21=1,619.., 55/34=1,617… Ces valeurs se rapprochent de plus en plus de celle de :

$$\varphi = (1+\sqrt{5})/2 = 1,618..$$

Les nombres de la suite de Fibonacci permettent d'obtenir des valeurs approchées du nombre d'or.

Il peut être amusant de constater que si vous formez une telle suite en partant de deux nombres arbitraires (par exemple : 2,93 et 1084,78) et dont les nombres suivants sont la somme des deux qui le précèdent vous obtenez également une approximation de la valeur du nombre d'or. Peut-on généraliser la récurrence de la suite de Fibonacci à d'autres nombres non entiers ? Oui, cette généralisation repose sur la formule de Binet, elle inclut les nombres réels et parfois complexes.

Quelques généralités sur le nombre d'or

La section dorée ou la divine proportion

et le nombre d'or

Trois points A, B, C forment une section dorée si :

BC/AB = AC/BC

Autrement dit si :

« Il y a de la petite partie à la grande partie le même rapport que de la grande au tout » (Vitruve).

Si on pose AB = 1 et BC = x on a donc AC = 1 - x

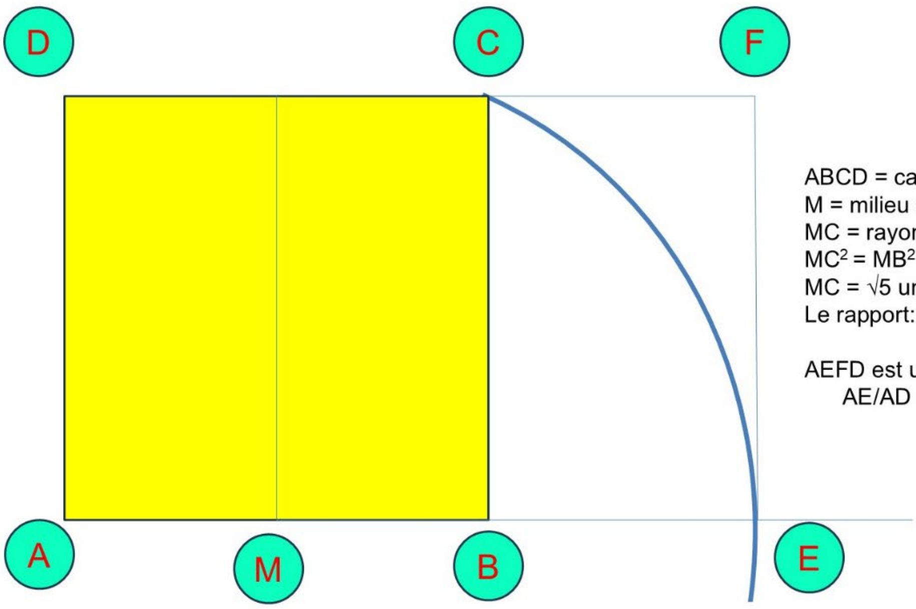
D'où : $\mathbf{x/1 = (x + 1)/x}$ soit $\mathbf{x^2 = x + 1}$ ou $\mathbf{x^2 - x - 1 = 0}$

Cette équation du second degré a 2 solutions :

= 1,61803399 et = - 0,61803399

Le nombre d’or est irrationnel (il ne peut pas être égal à la division entre 2 nombres entiers). C’est un nombre algébrique puisqu’il est le résultat d’une équation polynomiale. À partir de ce qui précède on en déduit notamment que : $1 / \varphi = \varphi - 1$.

Une construction géométrique donnant la proportion dorée



ABCD = carré de côté égal à 2 unités.
M = milieu de AB
MC = rayon d’un cercle centré en M
$MC^2 = MB^2 + BC^2 = 1 + 4 = 5$ unités^2
MC = $\sqrt{5}$ unités = ME
Le rapport: AE / AB = (AM + ME) / AB
= $(1+ \sqrt{5}) / 2 = \varphi$
AEFD est un « rectangle d’or »:
AE/AD = φ

À partir d’un carré (ABCD), on trace un cercle centré en M, milieu de AB, et de rayon MC qui coupe la direction AB en E. Le rapport AE/AB est égal à φ. On complète avec le point F afin de former le rectangle AEFD qui est un rectangle d’or puisque le rapport entre sa longueur et sa largeur est égal à φ.

On doit noter que le rectangle BEFC est également un rectangle d’or. En effet :

+ BC / BE = AB / (AE-AB)
+ or on a vu précédemment que AE / AB = φ d’où il résulte que : AE = φ x AB
+ donc BC / BE = AB / (φ x AB - AB) = 1 / (φ - 1) = φ

On peut poursuivre la construction en enlevant un carré de côté BE au rectangle BEFC, il va rester un rectangle d’or plus petit (sa taille est divisée par φ) et ainsi de suite. À chaque opération le nouveau rectangle d’or a une taille divisée par φ par rapport au précédent.

La spirale d’or

Le résultat d’une telle construction est donné ci-dessous. On peut observer la succession des rectangles d’or dont la taille diminue de φ à chaque étape. Nous avons en outre tracé un quart de cercle dans chacun des carrés. Les carrés sont disposés de manière à ce que les arcs forment une spirale appelée spirale d’or. Son centre est à l’intersection des segments DE et FB (voir figure précédente). En l’absence des arcs de cercle il existe plusieurs manières de disposer les carrés et de former les rectangles.

Spirale d’or.

La spirale de Fibonacci

Cette construction utilise des carrés dont la longueur des côtés est donnée par la suite de Fibonacci. Par exemple : 21 cm, 13 cm, 8 cm, 5 cm, 3 cm, 2 cm et 1 cm. Le résultat d'une telle construction est donné ci-dessous. On peut observer la succession des rectangles dont les proportions ne sont plus égales à φ mais restent très voisines (d'autant plus que les rectangles sont plus grands). Une différence apparait au niveau des plus petits éléments. Alors que l'on avait un rectangle d'or pour la spirale du même nom, il est remplacé par deux carrés identiques.

Pavage et spirale de Fibonacci.

Atelier proposé

+ on distribue un jeu de carrés dont les dimensions varient comme la suite de Fibonacci (21 cm, 13 cm, 8 cm, 5 cm, 3 cm, 2 cm, 1 cm et 1 cm). Chacun a une couleur différente et un quart de cercle a été tracé sur une des faces ;

+ à partir des faces qui n'ont pas d'arc de cercle, on demande de construire un rectangle en utilisant l'ensemble des carrés. On observe qu'il existe plusieurs possibilités pour ranger les carrés;

+ on retourne les carrés et on fait le même exercice en s'assurant que les arcs de cercle se rejoignent de manière à former la spirale de Fibonacci. Il n'y a qu'une façon de disposer les carrés.

+ on montre sur des panneaux la spirale d'or et celle de Fibonacci et on demande ce qui les différencie.