Angle d’or et suite de Fibonacci chez les végétaux

Contacts : Catherine Dargent (dargent.catherine@free.fr)
Patrick Roudeau (roudeau@lal.in2p3.fr)

Cet atelier aborde différents sujets et met l’accent sur l’approche expérimentale : comment réaliser une mesure et être sûr que ce que l’on voulait mesurer est bien ce que l’on a mesuré ?

Approche la plus simple : spirales sur un cône de pin maritime.

+ chaque participant dispose d’une « pigne »

La pigne vue de côté

+ en la prenant dans sa main, la pointe vers le haut, il observe la manière dont sont alignées les écailles. Le plus souvent les enfants voient au moins un alignement (points violets) suivant des lignes (hélices) qui tournent autour de la pigne dans le même sens. Faire remarquer qu’un deuxième alignement, tournant en sens opposé, est également présent (points bleus).

+ on demande aux enfants de compter combien il y a de lignes distinctes tournant vers la droite et vers la gauche ?

- Ils vont rapidement s’apercevoir que cela n’est pas simple.
- tout d’abord ils réalisent qu’il faut marquer la ligne dont on part (par exemple avec des points de couleur) ;
- ensuite, on observe qu’une même hélice peut faire plusieurs tours autour de la pigne. Il faut

donc compter les nombres d'hélices en se plaçant toujours au même niveau le long de l'axe du cône. Ce niveau est matérialisé par un élastique (en jaune). On pourra faire des mesures pour différentes positions de l'élastique.

+ le résultat obtenu est : **8** (violet) et **5** (bleu)

La pigne vue depuis son point d'attache

+ on recommence l'exercice. On trouve alors **13** spirales allant dans un sens et **8** dans l'autre. Il s'agit encore de deux nombres de la suite de Fibonacci ;
+ la difficulté de la mesure vient des déformations des spirales lorsque l'on est près de la tige. On peut cacher cette zone par un petit disque et compter les spirales qui rencontrent le bord du disque.

La pigne a deux modes de rangement pour ses écailles

Nous avons vu deux régimes de rangement des écailles : (13,8) pour la base et (8,5) pour la surface latérale.

Si l'on suit les 8 spirales qui partent de la base en s'enroulant dans le même sens, on les retrouve sur la surface latérale.

Par contre, en faisant le même exercice, on s'aperçoit que les 13 spirales de la base tournant dans l'autre sens se « perdent » progressivement, les écailles qui, au départ de la base, se touchent sur leurs 4 cotés, se décalent. Il apparait alors un autre jeu de spirales, en plus petit nombre et ayant des directions différentes de celles de départ.

Ce mécanisme a été reproduit (pas par nous, voir l'article de Y. Couder et S. Douady dans Pour la Science, numéro spécial 44, 2004) par des simulations utilisant un modèle simple dans lequel on recherche l'arrangement de disques sur un cylindre qui soit le plus compact possible. Le résultat dépend du rapport (T) entre le diamètre des disques et celui du cylindre. Les disques sont disposés régulièrement sur une hélice (génératrice). Au départ, quand T est voisin de 1, seule la configuration

(2,1) est possible pour les hélices apparentes (dites parastiques). Puis, lorsque la plante grandit, la valeur de T décroit et de nouvelles configurations apparaissent qui sont des couples de valeurs consécutives de la suite de Fibonacci : (3,2), (5,3), (8,5), (13,8), …

Pour les pignes de pin maritime, ce sont (8,5) et (13,8).

Faire remarquer que les hélices qui accrochent notre regard ne sont pas celle suivant laquelle les feuilles ou les fleurons apparaissent lors de la croissance de la plante mais sont le résultat obtenu par la plante afin d'obtenir le réseau de feuilles ou de graines qui soit le plus dense possible sur ses branches ou son capitule.

D'autres conifères peuvent être explorés ainsi que d'autres plantes comme les fruits de l'ananas.
L'examen des fleurs composées : marguerite, tournesol, pissenlit, …. nous permet d'atteindre des couples de valeurs plus élevées de la suite de Fibonacci (le numéro 22 des Carnets botaniques édité par la Société Botanique d'Occitanie).

Approche plus délicate : implantation des feuilles sur une tige.

+ le but est d'abord **d'identifier la position des feuilles au fur et à mesure qu'elles sont apparues sur une branche.**

On utilise une branche de pin maritime et on repère les positions d'attache des aiguilles (il y a toujours deux aiguilles en un même point).
Les points d'attache sont bien visibles et restent présents lorsque les aiguilles sont tombées. On peut ainsi repérer l'ordre d'apparition de ces aiguilles sur la tige.

*Branche de pin sur laquelle les petits renflements indiquent la position d'aiguilles (que l'on a retirées). On note que ces attaches sont alignées sur des hélices (parastiques) et nous avons observé qu'elles correspondaient au couple **(3,2)**, de nouveau deux valeurs de la suite de Fibonacci.*
Pour cela on part de la base coupée de la tige. On repère le point d'attache d'une aiguille. On va ensuite trouver le point d'attache de l'aiguille qui se trouve au-dessus, la plus proche en hauteur, en examinant tout autour de la tige, et ainsi de suite. Sur une tige, les feuilles les plus récentes sont vers

le haut.
On observe que les attaches des aiguilles sont sur une **hélice** appelée ici génératrice. Dans le cas de la pigne, seuls les écureuils y ont accès car elle est cachée par les écailles.

+ **mesure de l'angle entre deux points d'attache consécutifs**

On va ensuite planter une punaise de couleur en chaque point d'attache. On utilise des couleurs différentes afin de repérer l'ordre d'apparition des aiguilles

Les punaises sont dirigées vers le centre de la tige. On peut ainsi mesurer l'angle dont a tourné le primordium entre la création d'une feuille et la suivante.

Repérage de la position d'apparition des aiguilles, successivement dans le temps, lors de la croissance de la plante. Les directions des punaises sont dirigées vers l'axe de la tige. L'angle formé entre les directions de deux punaises consécutives correspond au déplacement du primordium entre deux feuilles consécutives. Cet angle est voisin de l'angle d'or.

Afin d'améliorer la précision de la mesure de cet angle, on repère les positions et directions de plusieurs attaches consécutives. L'angle recherché est alors égal à l'angle total divisé par le nombre d'intervalles considérés. Nous avons trouvé 135° (l'incertitude de la mesure n'a pas été évaluée) ce qui est proche de l'angle d'or (137,5°).

+ **disposition apparente des feuilles sur une tige**

Chez de nombreuses plantes les points d'attache des feuilles sur les tiges correspondent à celles attendues à partir de l'angle d'or. Il s'agit de celles dont les feuilles sont alternes et disposées en spirale.

Par contre lorsqu'on les observe dans la nature, il semble que la direction adoptée par les feuilles, de telles plantes, soit très différente de celle attendue. Par exemple celles de l'if, du mélèze, du lierre, de la ronce, … Cela vient du fait que de nombreux autres paramètres jouent dans la définition de l'orientation d'une feuille comme l'ensoleillement, les relations avec d'autres plantes, …

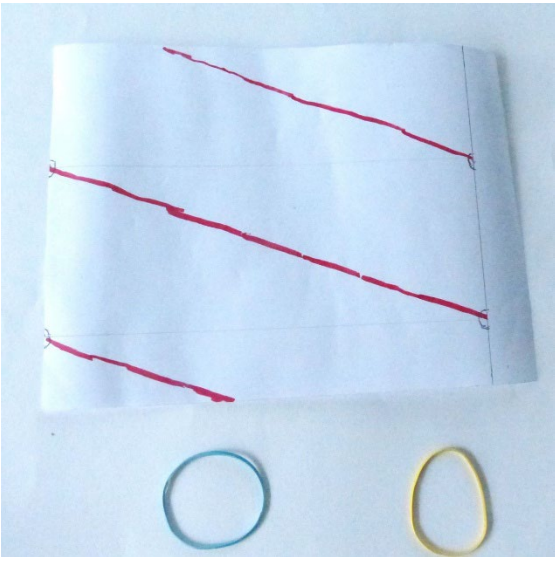
Hélice génératrice et hélices apparentes (parastiques).

En utilisant des cylindres en carton sur lesquels nous avons tracé des hélices nous essayons d'expliquer le passage entre la génération des feuilles (ou écailles, fleurons, …) suivant une hélice et l'apparition d'autres hélices, tournant en sens opposés, qui dépendent de la disposition adoptée par les feuilles et de la croissance de la plante.

Déplions une hélice

Afin de se familiariser avec une hélice qui s'enroule sur un cylindre :
- nous découpons une feuille blanche dont la largeur est égale à la circonférence d'un cylindre en carton ;
- nous traçons une ligne droite allant (par exemple) du bord gauche jusqu'au bord droit et faisant un angle par rapport au bas de la feuille ;
- nous traçons une seconde ligne, parallèle à la première et qui démarre, sur le bord gauche, à la même hauteur que celle à laquelle était arrivée la ligne précédente, sur le bord droit ;
- et ainsi de suite … Nous obtenons une suite de segments parallèles et régulièrement espacés.

Si maintenant nous enroulons la feuille sur le cylindre on obtient une ligne continue : une hélice. En effet « bord droit » et « bord gauche » se touchent et on peut passer continument d'un des segments précédents au suivant.

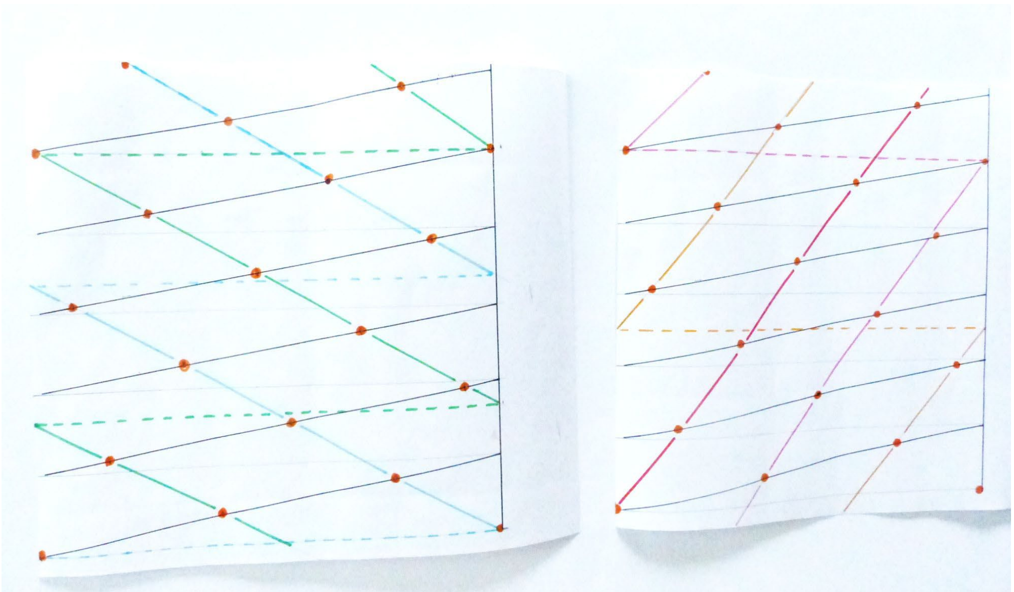


Lorsque nous enroulons la feuille, ici à gauche, sur le cylindre et l'y maintenons par 2 élastiques (jaune et bleu), les lignes rouges n'en forment plus qu'une qui s'enroule sur le cylindre.

Hélice génératrice et hélices apparentes

- nous refaisons le même exercice en traçant des segments parallèles (de couleur noire);
- nous disposons ensuite des points régulièrement espacés en partant, par exemple, du bas de la feuille ;
- s'il n'y a pas assez de place, lorsque l'on arrive sur un bord, pour disposer le point suivant, on passe au segment situé au-dessus, en changeant de bord, et en complétant avec la partie manquante. Ainsi, lorsque la feuille est enroulée sur le cylindre, les points apparaissent régulièrement espacés sur l'hélice.

Les points sont équidistants sur l'hélice noire (hélice génératrice). Visuellement, si cette hélice n'était pas dessinée, on ne la perçoit pas. Par contre on « voit » d'autres alignements de points réguliers correspondant à deux hélices parastiques s'enroulant l'une vers la gauche (cylindre de gauche) et l'autre vers la droite (l'autre cylindre).



Les mêmes hélices dépliées apparaissent sous la forme de segments. Les traits horizontaux en pointillés relient les différents segments formant une même hélice, de couleur donnée. On peut noter d'autres alignements de points, formant également des hélices mais qui sont moins denses que ceux donnant les 2 hélices « apparentes » (la distance entre 2 points y est plus grande).

Dans cet exemple, l'espacement (d) entre deux points est donné par l'angle d'or soit :

$$d = R \times \Theta_{or}$$

avec d et R en cm et Θ_{or} = 2,4 (radians). R est le rayon du cylindre.

On compte 2 hélices apparentes tournant vers la gauche et 3, vers la droite : un couple de nombres de la suite de Fibonacci.

Déroulement de l'atelier.

En fonction du public et du temps alloué le contenu de chacune des étapes de cet atelier peut être adapté.

Ces ateliers proposent un problème à résoudre. En fonction de l'âge et du temps disponible l'animateur fournit des éléments amenant à la solution. L'idéal serait que les participants proposent eux-mêmes une démarche pour arriver à cette solution.